



УДК 681.5.015.23

© 2017 г. Д.А. Назаров, канд. техн. наук

(Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

ПОДХОД К АНАЛИЗУ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

Рассматривается задача оценки влияния параметрических возмущений на качество функционирования технических систем. Предложен подход к решению этой задачи на основе дискретного представления многомерной области работоспособности. На базе такого представления предложен алгоритм построения вписанных гиперпараллелепипедов, позволяющих оценить допустимые интервалы вариации параметров внутри этой области и выявить чувствительность системы к дрейфу отдельных параметров.

Ключевые слова: надежность, область работоспособности, чувствительность систем.

DOI: 10.22250/isu.2017.54.94-104

Введение

В данной работе предлагается алгоритм анализа конфигурации области работоспособности (ОР), нацеленный на выявление параметров, имеющих наименьший и наибольший запасы для случайных вариаций. Данный алгоритм строится на основе модели дискретного представления ОР множеством элементарных гиперпараллелепипедов, заданных узлами регулярной сетки, и рассматривается в рамках программной системы нахождения и использования ОР (СНИОР) [1]. Строгое определение ОР будет дано позже, но для понимания сути задачи под ОР аналоговой технической системы в данной работе понимается ограниченное множество точек в пространстве параметров элементов этой системы, т.е. каждая точка этой области представляет набор внутренних параметров системы, при которых ее выходные характеристики удовлетворяют заданным требованиям.

Изначальной мотивацией определения характеристик ОР было сокращение вычислительной трудоемкости решения задачи параметрического синтеза с ис-

пользованием стохастического критерия. В этом случае приходилось выполнять многократные моделирования системы при различных реализациях набора внутренних параметров для проверки соответствия выходных параметров заданным требованиям. Определение характеристик ОР позволяет свести эту задачу только к проверке нахождения заданного вектора внутренних параметров в этой области, избегая трудоемкого расчета модели.

Процедура получения характеристик ОР связана с преодолением ряда трудностей, среди которых основными являются большая размерность пространства параметров, отсутствие априорной информации о конфигурации области (выпуклость, связность) и отсутствие явных зависимостей выходных характеристик от значений внутренних параметров, что характерно для достаточно сложных моделей реальных систем и дает возможность только дискретного поточечного зондирования [2]. Преодоление этих трудностей в различной степени заключено в существующих методах построения ОР.

Получение характеристик ОР позволяет не только избежать многократных моделирований системы при вычислении стохастических показателей надежности, но и открывает пути исследования ее как области допустимой вариации параметров. В качестве дополнения к известным вероятностно-статистическим методам теории надежности могут быть применены детерминированные геометрические методы анализа ОР. Зная тенденции дрейфа внутренних параметров и конфигурацию области, можно выбрать такие начальные значения параметров, которые обеспечат заданный уровень параметрической надежности системы. Геометрический анализ ОР позволяет сделать заключения о величине допустимых отклонений параметров для заданных номиналов, выявить «узкие места» ОР, в которых случайные параметрические возмущения могут привести к отказу. В данной работе предлагается подход к получению такой информации на основе построения вписанных в ОР гиперпараллелепипедов, длины ребер которых по каждому измерению будут показывать относительные запасы для дрейфа соответствующих параметров.

Для решения этой задачи в первую очередь рассмотрим постановку задачи построения ОР, вытекающей из задачи параметрического синтеза, а затем будут изложены основные идеи используемой дискретной аппроксимации ОР.

Определение области работоспособности

Модель исследуемой системы связывает выходные характеристики $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ с вектором параметров составляющих ее компонентов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ в виде зависимостей:

$$y_i = y_i(\mathbf{x}), \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Ограничения на выходные характеристики указываются в техническом задании, определяют работоспособность системы и называются *условиями работоспособности*:

$$y_{i \min} \leq y_i(\mathbf{x}) \leq y_{i \max}, \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Нарушение условий (2) квалифицируется как отказ системы. К состоянию отказа приводят изменения значений параметров элементов, которые возникают под влиянием факторов внешней среды и внутренних процессов износа и старения.

В условиях параметрического дрейфа и требований обеспечения параметрической надежности возникает задача выбора таких номинальных значений параметров, которые обеспечили бы выполнение условий работоспособности (2) в течение заданного времени эксплуатации. Эта задача называется задачей параметрического синтеза и формулируется следующим образом [3]:

$$\mathbf{x}_{nom} = \arg \max P(\mathbf{y}_{\min} \leq \mathbf{y}(X(\mathbf{x}_{nom}, t)) \leq \mathbf{y}_{\max}, \forall t \in [0, T]), \quad (3)$$

где $X(\mathbf{x}_{nom}, t)$ – случайный процесс изменения параметров; T – заданное время эксплуатации. Практическое применение критерия (3) требует многократных симуляций системы для вычисления ее выходных характеристик, что требует больших вычислительных затрат, поэтому имеет место следующая его формулировка:

$$\mathbf{x}_{nom} = \arg \max P(X(\mathbf{x}_{nom}, t) \in D_x, \forall t \in [0, T]), \quad (4)$$

где проверка выполнения условий работоспособности (2) заменена проверкой нахождения параметров элементов системы в области D_x , называемой *областью работоспособности* (ОР), являющейся отображением условий работоспособности (2) в пространство внутренних параметров исследуемой системы:

$$D_x = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid y_{i \min} \leq y_i(\mathbf{x}) \leq y_{i \max}, \forall i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (5)$$

Таким образом, область работоспособности (5) является множеством точек пространства внутренних параметров, в которых выходные характеристики удовлетворяют требованиям (2).

Получение характеристик ОР позволяет существенно снизить вычислительные затраты расчета стохастических критериев в задаче параметрического синтеза (4), а также дает возможность применения детерминированных методов выбора номинальных значений параметров и иных исследований области допустимой вариации внутренних параметров системы [4].

Дискретное представление ОР на основе регулярной сетки

Для большинства достаточно сложных объектов соотношения (1) в аналитическом виде задать проблематично [2]. Вместе с этим, при проектировании технических систем часто используются различные САПР и имитационные моде-

ли, реализующие соотношения (1) в виде «черного ящика». Таким образом, получить аналитические выражения границ ОР на основе модели (1) практически невозможно, при этом доступным является только поточечное исследование пространства значений параметров элементов.

Для представления характеристик ОР в работе используется дискретная модель, полученная на основе метода многомерного зондирования и представления многомерной области дискретным множеством элементарных гиперпараллелепипедов (ЭГ), заданных узлами регулярной сетки.

Модель дискретного представления ОР задается четверкой, описывающей параметры сетки и состояния индикаторов принадлежности ее элементов ОР:

$$G_R = (n, B, Q, S), \quad (6)$$

где n – размерность пространства внутренних параметров; $B = \{(x_{i \min}, x_{i \max}), \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ – границы гиперпараллелепипеда, внутри которого строится сетка. В качестве такого ограничивающего параллелепипеда может выступать брус производственных допусков или описанный около ОР брус [5, 6]. Параметр $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ описывает количество шагов («квантов») сетки по каждому параметру. Таким образом, каждый ЭГ (k_1, k_2, \dots, k_n) образован гранями каждого из квантов $k_i = 1, 2, \dots, q_i$ каждого параметра, а их общее количество равно $R = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$.

Состояние каждого ЭГ описывается бинарным индикатором $s_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, R$ принадлежности ОР, значение которого вычисляется в его геометрическом центре по характеристической формуле:

$$F_y(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & y_{i \min} \leq y_i(\mathbf{x}) \leq y_{i \max}, \forall i = 1, 2, \dots, m, \\ 0, & y_i(\mathbf{x}) < y_{i \min} \vee y_i(\mathbf{x}) > y_{i \max}, \exists i \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases} \quad (7)$$

Множество $S = (s_1, s_2, \dots, s_R)$ индикаторов принадлежности ОР каждого ЭГ также входит в модель (6). Между номером $p = 1, 2, \dots, R$ элемента s_p множества индикаторов и набором индексов соответствующего элемента многомерной сетки (k_1, k_2, \dots, k_n) существует взаимно-однозначное соответствие [5, 6]. Значение номера p элемента s_p для элемента с набором индексов (k_1, k_2, \dots, k_n) вычисляется в виде

$$p = k_1 + q_1(k_2 - 1) + q_1q_2(k_3 - 1) + \dots + q_1q_2 \dots q_{n-1}(k_n - 1). \quad (8)$$

Поскольку удобнее выполнять перебор ЭГ по одномерному массиву индикаторов S , на практике наиболее востребовано обратное преобразование: для номера p элемента s_p множества индикаторов получить набор (k_1, k_2, \dots, k_n) соответствующего элементарного параллелепипеда. Индексы $k_i(p)$ вычисляются после-

довательно в соответствии с выражениями (9):

$$k_n = \lfloor (p-1)/q_1q_2\dots q_{n-1} \rfloor + 1, k_{n-1} = \lfloor (p - q_1q_2\dots q_{n-1}(k_n - 1))/q_1q_2\dots q_{n-2} \rfloor + 1, \quad (9)$$

$$\dots, k_1 = p - (q_1(k_2 - 1) + q_1q_2(k_3 - 1) + \dots + q_1q_2\dots q_{n-1}(k_n - 1)).$$

Если обозначить все множество ЭГ, заданных моделью (6), как $B_G = \{e_{k_1, k_2, \dots, k_n}, k_i = 1, 2, \dots, q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, то характеристическая функция (7) задаст разбиение этого множества на два непересекающихся подмножества $B_G = B_G^+ \cup B_G^-, B_G^+ \cap B_G^- = \emptyset$, где подмножество B_G^+ содержит ЭГ, в центральных точках которых выполняются условия работоспособности (2), а именно: $B_G^+ = \{e_{k_1, k_2, \dots, k_n} : F_y(\mathbf{x}(k_1, k_2, \dots, k_n)) = 1\}$. Множество B_G^+ является дискретным представлением ОР.

На рис. 1 проиллюстрировано дискретное представление ОР на основе регулярной сетки в двумерном случае и хранение индикаторов принадлежности элементов двумерной сетки в одномерном массиве.

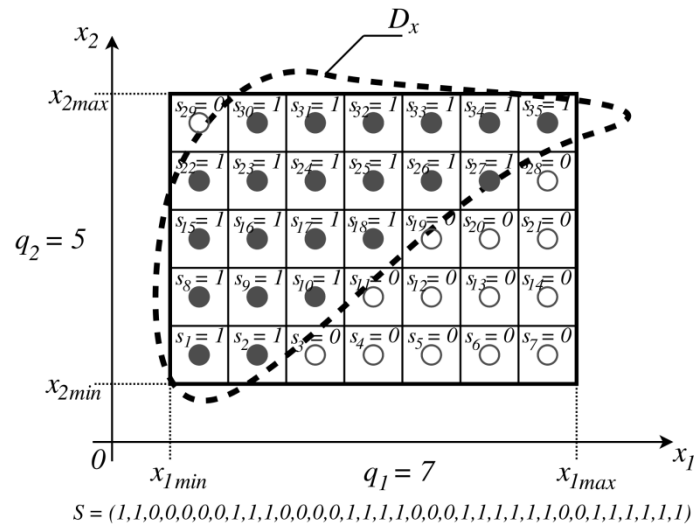


Рис. 1. Дискретное представление ОР на основе регулярной сетки.

Построение вписанных в ОР гиперпараллелепипедов

Для отыскания оптимальных значений параметров по критерию максимального запаса работоспособности с использованием дискретного представления ОР применялись алгоритмы построения вписанного куба и окрестности Мура. Эти фигуры являются симметричными и позволяют найти точку, максимально удаленную от границы ОР [7, 8].

Для оценки запасов по каждому отдельному параметру и получения их соотношений требуется алгоритм построения несимметричных фигур, вписанных в ОР. В качестве таких фигур рассмотрим гиперпараллелепипеды с гранями, параллельными осям координат. Как и симметричные фигуры, эти гиперпараллелепипеды по сути являются множествами ЭГ, принадлежащих дискретному представ-

лению ОР с индексами, удовлетворяющими определенными требованиям для формирования фигуры. Обозначим такую фигуру $P \subseteq B_G^+$.

Характерной особенностью алгоритма построения вписанного гиперпараллелепипеда, в отличие от куба, является указание в качестве начального элемента не центрального, а вершинного элемента. Увеличение объема фигуры достигается не итерационным радиальным «наращиванием» посредством увеличения длины ребра [7, 8], а указанием диагонального элемента, вычисляемого путем последовательного смещения $(\delta_1^P, \delta_2^P, \dots, \delta_n^P)$ индексов относительно начального элемента $(k_1^P, k_2^P, \dots, k_n^P)$. На рис. 2 проиллюстрированы примеры построения шести параллелепипедов внутри дискретного представления ОР для двумерного случая.

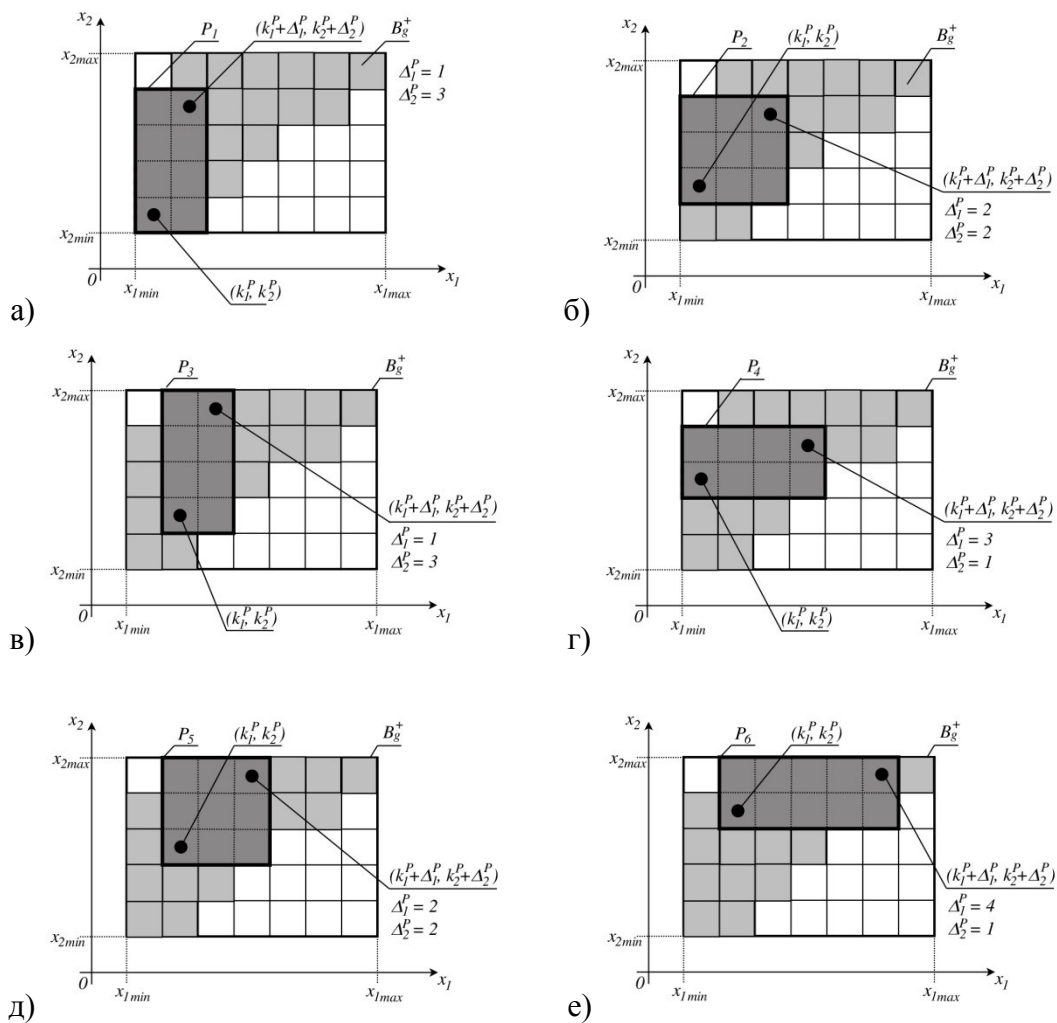


Рис. 2. Схематическая иллюстрация алгоритма построения вписанных в ОР параллелепипедов в двумерном случае.

Алгоритм состоит в последовательном переборе ЭГ из подмножества B_G^+ и попытки для каждого построить вписанный гиперпараллелепипед максимального объема. Для каждого ЭГ с индексами $(k_1^P, k_2^P, \dots, k_n^P)$ итерационно генерируются смещения $(\delta_1^P, \delta_2^P, \dots, \delta_n^P)$ индексов и определяются максимально возможные

$(\Delta_1^P, \Delta_2^P, \dots, \Delta_n^P)$ в соответствии с алгоритмом 1.

Алгоритм 1.

1. *Задается начальное смещение по первой координате $(1, 0, \dots, 0)$;*
2. *Выполняется проверка элемента $(k_1^P + 1, k_2^P, \dots, k_n^P)$ на входжение в B_G^+ ;*
3. *Выполняется поиск максимально возможного смещения Δ_1^P ;*
4. *Устанавливается индекс смещения для следующей координаты $(0, 1, \dots, 0)$;*
5. *Выполняется проверка $(k_1^P, k_2^P + 1, \dots, k_n^P)$ на входжение в B_G^+ ;*
6. *Выполняется поиск максимально возможного смещения Δ_2^P ;*
7. *Если $\Delta_2^P < \Delta_1^P$, то $\Delta_1^P = \Delta_2^P$;*
8. *Устанавливается индекс смещения для следующей координаты $(0, 0, 1, \dots, 0)$;*
9. *Выполняется проверка $(k_1^P, k_2^P, k_3^P + 1, \dots, k_n^P)$ на входжение в B_G^+ ;*
10. *Процесс повторяется и заканчивается либо на последней координате, либо на ЭГ, не принадлежащем множеству B_G^+ .*
11. *Если дальнейшее увеличение Δ_i^P невозможно, то фиксируются индексы диагональных ЭГ полученного P_i .*
12. *Выполняется переход к следующему ЭГ из B_G^+ , переход к шагу 1.*

Результатом выполнения алгоритма 1 является список гиперпараллелепипедов $\{P_1, P_2, \dots, P_M\}$, вписанных в ОР. Возможны варианты, когда по построенным фигурам трудно сделать общее заключение, дрейф каких из параметров наиболее критичен для выполнения условий работоспособности системы. Например, на рис. 2 выявлено 6 прямоугольников, среди которых есть такие, которые указывают на критичность дрейфа по параметру x_1 , в то время как по параметру x_2 имеется двукратный запас, так и прямоугольники, указывающие на обратное. При этом найдены два куба, свидетельствующие о наличии внутри ОР элементов, равноудаленных от границы с точностью данной дискретной аппроксимации. Об этом также свидетельствует тот факт, что все найденные прямоугольники попарно пересекаются.

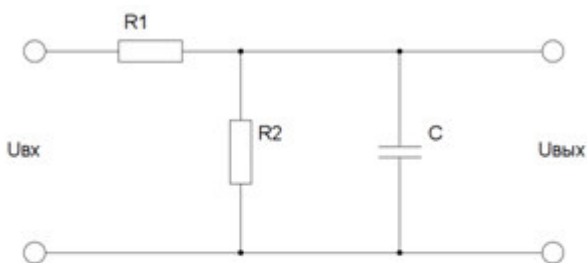


Рис. 3. Принципиальная схема делителя напряжения

Пример

Рассмотрим делитель напряжения, принципиальная схема которого изображена на рис. 3 [10].

Внутренними параметрами делителя являются: $x_1 = R_1$ – сопротивление резистора R_1 , Ом; $x_2 = R_2$ – сопротивление резистора R_2 , Ом; $x_3 = C$ – емкость конденсатора C , Ф; $x_4 = U_{BX}$ – входное напряжение, В.

Выходными характеристиками делителя являются: $y_1 = \tau$ – постоянная времени перезарядки конденсатора C ; $y_2 = P$ – мощность рассеяния, Вт; $y_3 = U_{\text{вых}}$ – напряжение на выходе делителя, В, описываемые выражениями [10]:

$$y_1 = \frac{CR_1R_2}{R_1 + R_2}, y_2 = \frac{U_{BX}^2}{R_1 + R_2}, y_3 = \frac{U_{BX}^2 R_2}{R_1 + R_2}.$$

На выходные характеристики налагаются условия работоспособности:

$$y_1 < 0.5 \cdot 10^{-6}; y_2 < 0.1; 4 \leq y_3 \leq 6.$$

Номинальные расчетные значения параметров элементов делителя:

$$x_1 = 680 \text{ Ом}; x_2 = 680 \text{ Ом}; x_3 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}; x_4 = 10 \text{ В}.$$

Для построения ОР использовались следующие границы описанного гиперпараллелепипеда, построенного методом Монте-Карло:

$$1.004 \leq x_1 \leq 1499.97 \text{ Ом}; 176.382 \leq x_2 \leq 1500 \text{ Ом};$$

$$1 \cdot 10^{-10} \leq x_3 \leq 9.99984 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}; 4.00602 \leq x_4 \leq 15.4227 \text{ В}.$$

Каждый из этих диапазонов разбивался на 20 квантов:

Шаг по параметру x_1 : $h_1 = 74.9483 \text{ Ом}$ (1.004, 75.9523, 150.901,...);

Шаг по параметру x_2 : $h_2 = 66.1809 \text{ Ом}$ (176.382, 242.563, 308.744,...);

Шаг по параметру x_3 : $h_3 = 4.95 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$ ($1.0 \cdot 10^{-10}$, $5.95 \cdot 10^{-10}$, $1.09 \cdot 10^{-9}$,...);

Шаг по параметру x_4 : $h_4 = 0.5708 \text{ В}$ (4.006, 4.5769, 5.1477,...).

Сечения дискретного представления ОР, соответствующие указанным номиналам параметров показаны на рис. 4:

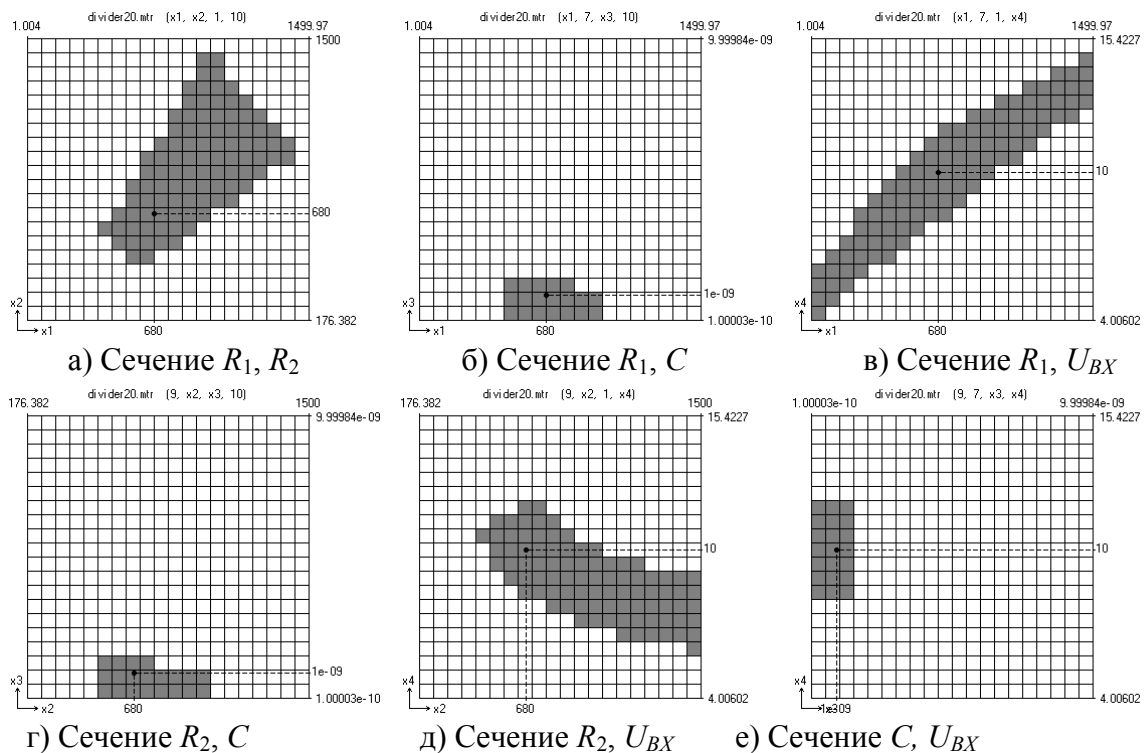


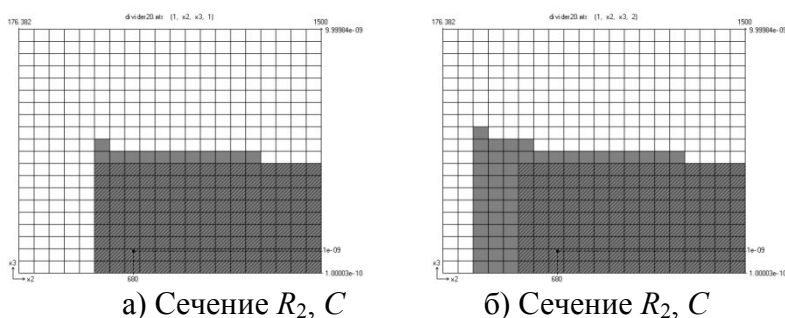
Рис. 4. Двумерные сечения ОР, выполненные по значениям номиналов.

Внутри ОР были найдены гиперпараллелепипеды.

1. С максимальным объемом.

Параметр	Мин	Макс	Длина ребра	Кол-во квантов
R_1 , Ом	1,004	150,901	149,897	2
R_2 , Ом	507,286	1500,0	992,713	15
C , Ф	$1,0 \cdot 10^{-10}$	$4,555 \cdot 10^{-9}$	$4,455 \cdot 10^{-9}$	9
U_{BX} , В	4,577	6,289	1,713	3

Как можно видеть, в данный гиперпараллелепипед не попали номинальные значения параметров R_1 (680 Ом) и U_{BX} (10 В).



а) Сечение R_2 , C

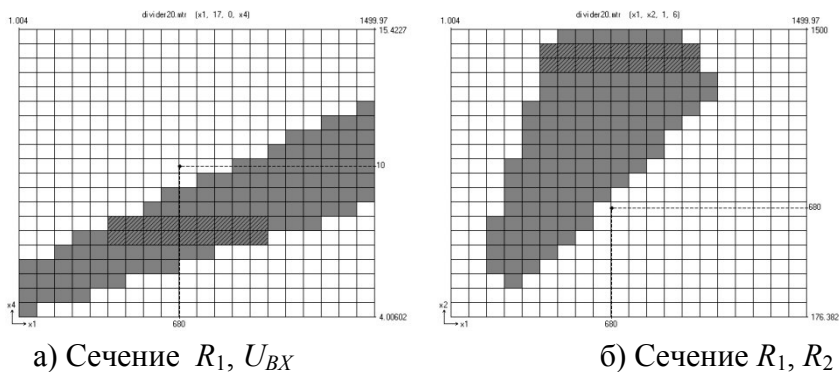
б) Сечение R_2 , C

Рис. 5. Сечение вписанного в ОР гиперпараллелепипеда (заштрихованная область), максимального по объему, с максимальными диапазонами вариации по параметрам R_2 и C .

2. С максимальным ребром по параметру R_1 .

Параметр	Мин	Макс	Длина ребра	Кол-во квантов
R_1 , Ом	375,746	1050,28	674,535	9
R_2 , Ом	1301,46	1433,82	132,362	2
C , Ф	$1,0 \cdot 10^{-10}$	$1,09 \cdot 10^{-9}$	$9,9 \cdot 10^{-10}$	2
U_{BX} , В	6,86	8,002	1,142	2

Как видно, в данный гиперпараллелепипед не попали номинальные значения параметров R_2 (680 Ом) и U_{BX} (10 В). Более того, как видно на рисунке б, значения этих параметров выходят из ОР. Найденная область с максимальной вариацией по первому параметру не соответствует комбинации номинальных параметров исследуемого объекта.



а) Сечение R_1 , U_{BX}

б) Сечение R_1 , R_2

Рис. 6. Сечения вписанного в ОР гиперпараллелепипеда (заштрихованная область), с максимальной вариацией по параметру R_1 .

3. С максимальным ребром по параметру R_2 .

Параметр	Мин	Макс	Длина ребра	Кол-во квантов
R_1 , Ом	1,004	150,901	149,897	2
R_2 , Ом	308,744	1500,0	1191,26	18
C , Ф	$1,0 \cdot 10^{-10}$	$1,09 \cdot 10^{-9}$	$9,9 \cdot 10^{-10}$	2
$U_{ВХ}$, В	5,148	6,289	1,142	2

Аналогично предыдущим результатам, найденный гиперпараллелепипед с максимальной вариацией по параметру R_2 расположен в подобласти ОР, в которую не попадают выбранные номинальные значения параметров R_1 , $U_{ВХ}$.

4. С максимальным ребром по параметру c .

Параметр	Мин	Макс	Длина ребра	Кол-во квантов
R_1 , Ом	1,004	150,901	149,897	2
R_2 , Ом	308,744	441,106	132,362	2
C , Ф	$1,0 \cdot 10^{-10}$	$5,545 \cdot 10^{-9}$	$5,445 \cdot 10^{-10}$	11
$U_{ВХ}$, В	5,148	6,289	1,142	2

5. С максимальным ребром по параметру $U_{ВХ}$.

Параметр	Мин	Макс	Длина ребра	Кол-во квантов
R_1 , Ом	975,332	1125,23	149,897	2
R_2 , Ом	772,01	904,372	132,362	2
C , Ф	$1,0 \cdot 10^{-10}$	$1,09 \cdot 10^{-9}$	$9,9 \cdot 10^{-10}$	2
$U_{ВХ}$, В	9,144	13,139	3,996	7

Заключение

Рассмотрена задача анализа конфигурации ОР, связанная с оценкой запасов допустимого дрейфа параметров. Возникающие под влиянием как факторов внешней среды, так и внутренних процессов дрейф параметров систем может привести к их выходу за границу ОР, что квалифицируется как отказ. Анализ конфигурации ОР в этом смысле позволяет выявить, к изменениям каких параметров система наиболее чувствительна. Предложен алгоритм построения вписанных в ОР гиперпараллелепипедов, по соотношениям сторон которых можно делать выводы о чувствительности исследуемой системы к вариациям отдельных параметров. При анализе полученных прямоугольников также нельзя упускать из внимания тот факт, что разные параметры могут иметь различную скорость дрейфа, что может внести существенные поправки в результаты анализа конфигурации ОР. Еще одним важным замечанием к предложенному методу анализа конфигурации ОР является тот факт, что он рассматривает дрейф параметров по

отдельности и не учитывает их совместную вариацию. Тем не менее, предложенный метод полезен для выявления ОР, имеющих характерные вытянутые по отдельным параметрам формы.

Результаты получены с использованием оборудования ЦКП "Дальневосточный вычислительный ресурс" ИАПУ ДВО РАН (<https://cc.dvo.ru>).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов О.В., Назаров Д.А.* Программно-алгоритмический комплекс построения, анализа и использования областей работоспособности // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2015. – №2. – С.3-13.
2. *Норенков И.П.* Основы автоматизированного проектирования. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
3. *Абрамов О.В.* Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. – М.: Наука, 1992.
4. *Абрамов О.В.* Возможности и перспективы функционально-параметрического направления теории надежности // Информатика и системы управления. – 2014. – №4(42). – С.53-66.
5. *Катуева Я.В., Назаров Д.А.* Аппроксимация и построение областей работоспособности в задаче параметрического синтеза // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – Пенза: ПГУ. – 2005. – Т.1. – С.130-134.
6. *Катуева Я.В., Назаров Д.А.* Алгоритмы анализа области работоспособности, заданной в матричной форме // Информатика и системы управления. – 2005. – №2(10). – С.118-128.
7. Назаров Д.А. Использование областей работоспособности для оптимального выбора номиналов параметров // Информатика и системы управления. – 2011. – № 2(28). – С.59-69.
8. Катуева Я.В., Назаров Д.А. Методы параметрического синтеза на основе сеточного представления области работоспособности // Информационные технологии. – 2015. – №9. С.651-656.
9. Саушев А.В. Области работоспособности электротехнических систем. – СПб.: Политехника, 2013.
10. Саушев А.В. Аналитический метод назначения допусков на параметры динамических систем // Информатика и системы управления. – 2012. – № 3(33). – С.120-131.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Абрамовым.

E-mail:

Назаров Дмитрий Анатольевич – nazardim@iacp.dvo.ru