

Проблемы механики деформируемого твёрдого тела

к 70-летию со дня рождения
академика Н.Ф. Морозова

Санкт-Петербург
2002



Рецензент: проф. В.Н. Усков (Балт. гос. техн. ун-т)

Редакционная коллегия: Д.А. Индейцев (ИПМаш РАН), П.А.Жилин (СПбГТУ), Б.Н.Семенов (СПбГУ, отв.редактор)

Проблемы механики деформируемого твердого тела: Межвуз.сб./Санкт-Петербургский государственный университет. - Санкт-Петербург: СПбГУ, 2002. - 318 с.

ISBN 5-7997-0427-4

Представлены результаты фундаментальных исследований упругого и неупругого деформирования сред и конструкций, различных вопросов прочности, устойчивости и разрушения, постановки экспериментов, а также решения некоторых частных задач.

Сборник предназначен для научных работников в области механики сплошных сред, инженеров-механиков и аспирантов.

УДК 539.3

Сборник посвящается
70-летию со дня рождения академика Н.Ф. Морозова.

ISBN 5-7997-0427-4

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Институт автоматизации и процессов управления ДВО, Владивосток

Аннотация

Построены экономичные вычислительные алгоритмы, реализующие операцию сравнения тензоров упругих постоянных анизотропных материалов. Разработана программная реализация построенных алгоритмов. Приведенные оценки времени выполнения операций в тестовой задаче позволяют оценить масштаб входной информации при решении в режиме реального времени задач идентификации анизотропных материалов.

Введение

По мере стремительного развития аппаратных и совершенствования алгоритмических средств происходит существенное расширение круга задач, доступных решению в режиме реального времени. Одной из таких задач является задача идентификации анизотропных материалов. Выборку в базе данных для анизотропных материалов целесообразно проводить, например, на основе сравнения тензоров упругих постоянных. В процессе измерения исследуемые образцы обычно ориентированы произвольно, поэтому необходимо подобрать такую комбинацию операций вращения системы координат одного из сравниваемых образцов, чтобы тензоры упругих постоянных были максимально близки в некоторой метрике. Требование выполнения в реальном времени большого числа сравнений приводит к необходимости разработки экономичных алгоритмов, реализующих соответствующие операции с тензорами четвертого ранга, связанными определенными условиями симметрии. В данной работе изложено построение экономичного алгоритма для общего случая анизотропных материалов, когда тензор упругих постоянных содержит 21 независимую компоненту [1].

Физическая постановка задачи.

В некоторой декартовой системе координат X_1, X_2, X_3 заданы компоненты тензора четвертого ранга $A: \|A_{ijkl}\|$ $i, j, k, l=1, 2, 3$. При этом

$$A_{ijkl} = A_{klij} = A_{jikl} = A_{iljk} \quad (1)$$

Таким образом, из 81 компоненты тензора A независимыми являются только 21 компонента:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1123} & A_{1131} & A_{1112} \\ & A_{2222} & A_{2233} & A_{2223} & A_{2231} & A_{2212} \\ & & A_{3333} & A_{3323} & A_{3331} & A_{3312} \\ & & & A_{2323} & A_{2331} & A_{2312} \\ & & & & A_{3131} & A_{3112} \\ & & & & & A_{1212} \end{array} \right\|$$

В этой же самой системе координат даны компоненты тензора четвертого ранга $B: \|B_{ijkl}\|$, связанные условиями симметрии, аналогичными равенствам

(1). Существует ли такая система координат x'_1, x'_2, x'_3 , чтобы в этой системе компоненты тензора B совпали с компонентами тензора A в системе x_1, x_2, x_3 ?

Математическая формулировка задачи.

Пусть n_{ip} – направляющие косинусы оси x'_i по отношению к осям x_p . Обозначим углы Эйлера, совмещающие систему x_1, x_2, x_3 с системой x'_1, x'_2, x'_3 через a_1, a_2, a_3 . Тогда матрица n имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3 \sin a_1 \sin a_2 & -\cos a_1 \sin a_2 - \cos a_3 \sin a_1 \cos a_2 & \sin a_1 \sin a_2 \\ \sin a_1 \cos a_2 + \cos a_3 \cos a_1 \sin a_2 & -\sin a_1 \sin a_2 + \cos a_3 \cos a_1 \cos a_2 & -\cos a_1 \sin a_2 \\ \sin a_2 \sin a_3 & \cos a_2 \sin a_3 & \cos a_3 \end{array} \right\| \quad (2)$$

В системе x'_1, x'_2, x'_3 компоненты тензора B равны

$$B'_{ijkl} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 B_{pqrs} n_{ip} n_{jq} n_{kr} n_{ls} \quad (3)$$

Существуют ли такие три числа a_1, a_2, a_3 , удовлетворяющие условиям

$$0 \leq a_1 < 2\pi, \quad 0 \leq a_2 < 2\pi, \quad 0 \leq a_3 \leq \pi \quad (4)$$

что имеют место равенства

$$A_{ijkl} = B'_{ijkl} \quad (5)$$

для всех $i, j, k, l=1, 2, 3$?

Вычислительная формулировка.

Различие в структуре материалов и влияние ошибок измерений приводят к отсутствию точного решения задачи (2)-(5). При работе с реальными данными следует искать "близкий" к A тензор B' и задача формулируется в следующем виде:

Найти минимум функции трех переменных a_1, a_2, a_3

$$f(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 W_{ijkl} (A_{ijkl} - B'_{ijkl})^2 \quad (6)$$

при условии

$$\min f(a_1, a_2, a_3) < e, \quad (7)$$

где e – некоторое заранее заданное число, весовая функция W удовлетворяет условиям симметрии вида (1), величины B'_{ijkl} определяются равенствами (3) и переменные a_1, a_2, a_3 берутся из области, определенной (4).

Реализация различных подходов к решению (2), (3), (6), (7) приводит к необходимости построения ряда экономичных вычислительных алгоритмов. Рассмотрим реализацию подхода на основе последовательного перебора значений углов a_1, a_2, a_3 с некоторым неравномерно заданным шагом. Преобразование (2), (3) можно представить в виде последовательности двух преобразований, первое – с углами a_1^0, a_2, a_3 , второе – с углами $(\Delta = a_1 - a_1^0), 0, 0$. Пусть тензор C получен из тензора B в результате первого преобразования координат, тогда следующими при одномерном проходе по углу a_1 будут выполняться преобразования

$$B'_{ijkl} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 C_{pqrs} n_{ip}^{\Delta} n_{jq}^{\Delta} n_{kr}^{\Delta} n_{ls}^{\Delta} \quad (8)$$

с более простой матрицей направляющих косинусов

$$n^{\Delta} = \begin{pmatrix} \cos \Delta & \sin \Delta & 0 \\ -\sin \Delta & \cos \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta = a_1 - a_1^0 \quad (9)$$

Наличие в нулей и единиц в (9) позволяет сократить число арифметических операций при реализации вычислений. Для решения задачи (2), (3), (6), (7) можно выбрать, например, метод Монте-Карло, в этом случае вычислительный алгоритм необходимо оптимизировать для произвольных последовательностей углов a_1, a_2, a_3 . Если диапазон изменения a_1 превышает π , можно сразу проводить вычисления вида (6) с компонентами тензора B^{π} , который получается из B' вращением системы координат на угол π вокруг

При преобразовании (8), (9) неизменной остается компонента тензора C_{3333}

$$B'_{(21)} = B'_{3333} = C_{3333} = C_{(21)} \quad (19)$$

Следовательно, выражение (11) можно упростить

$$f(a_1, a_2, a_3) = f' + \sum_{m=1}^{20} s_m^w (A_{(m)} - B'_{(m)})^2 \quad f' = s_{21}^w C_{(21)} \quad (20)$$

и вычислять слагаемое f' только один раз при каждом одномерном проходе по a_1 . Соответственно, уменьшается и число используемых комбинаций троек индексов (j_m, k_m, l_m) , причем j_m принимает только значение 1 или 2:

$$\begin{pmatrix} j_m \\ k_m \\ l_m \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (21)$$

$$\tilde{C}_{pqrl} = \sum_{s=1}^2 C_{pqrs} n_{ls}^{\Delta} \quad l = 1, 2 \quad (22)$$

$$\hat{C}_{pqkl} = \sum_{r=1}^2 \tilde{C}_{pqrl} n_{kr}^{\Delta} \quad \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (23)$$

$$\hat{C}_{pq13} = \tilde{C}_{pq31}; \quad \hat{C}_{pq23} = \tilde{C}_{pq32}; \quad \hat{C}_{pq33} = C_{pq33} \quad (24)$$

$$\tilde{C}_{1jkl} = \sum_{q=1}^2 \hat{C}_{1qkl} n_{jq}^{\Delta}; \quad \tilde{C}_{2jkl} = \sum_{q=1}^2 \hat{C}_{2qkl} n_{jq}^{\Delta}; \quad \tilde{C}_{3jkl} = \sum_{q=1}^2 \hat{C}_{3qkl} n_{jq}^{\Delta} \quad (25)$$

$$B'_{ijkl} = \sum_{p=1}^2 \tilde{C}_{pjkl} n_{ip}^{\Delta} \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

$$B'_{3jkl} = \tilde{C}_{3jkl} \quad (27)$$

Из условий симметрии вида (1) следует

$$\tilde{C}_{pqrl} = \tilde{C}_{qprl}; \quad \hat{C}_{pqkl} = \hat{C}_{qpkl} \quad (28)$$

С учетом (12) число арифметических операций в алгоритме (9), (19)-(28) равно 365.

$$f^{\pi}(a_1, a_2, a_3) = f' + \sum_{m=1}^{20} s_m^w (A_{(m)} - B_{(m)}^{\pi})^2 \quad f' = s_{21}^w C_{(21)} \quad (29)$$

Компоненты тензора B^{π} могут быть получены без дополнительных вычислений, поскольку они могут отличаться от компонент тензора B' лишь при определенных комбинациях индексов (i_m, k_m, l_m) и только противоположным знаком:

$$B_{ijk}^{\pi} = -B'_{ijk} \quad \begin{pmatrix} i \\ k \\ l \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

или в более простом виде:

$$B_{(m)}^{\pi} = \begin{cases} B'_{(m)} & m = 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21 \\ -B'_{(m)} & m = 1, 2, 4, 5, 9, 12, 15, 18 \end{cases} \quad (30)$$

В формулах (20) и (29) различны только восемь слагаемых, поэтому при вычислении (29) можно воспользоваться промежуточными результатами, полученными при вычислении (20). Добавочное число арифметических операций равно 32. Общее число арифметических операций в алгоритме (9), (19)-(30) равно 397.

Программная реализация разработанных алгоритмов

Разработанные вычислительные алгоритмы должны сопровождаться эффективной программной реализацией. При построении вычислительных алгоритмов экономичность напрямую связывалась с числом арифметических операций, поэтому при разработке программной реализации решались вопросы, связанные с уменьшением накладных расходов при вычислениях. Вычислительные возможности разработанных программно-алгоритмических средств продемонстрируем на решении тестовой задачи, в которой подбор углов Эйлера производится последовательным перебором с шагом в один градус. Углы принимают все возможные значения из (4), поэтому размеры сетки $360 \times 360 \times 180$. В Таблице 2 представлены результаты замеров времени выполнения и показателей производительности для трех алгоритмов. Первый алгоритм предназначен для произвольных последовательностей углов Эйлера, второй алгоритм – для поворота вокруг одной оси, а третий является модификацией второго с одновременным поворотом системы координат на π . Время выполнения разработанной программной реализации примерно пропорционально числу операций в алгоритме. Показатели

производительности приведены в миллионах операций с плавающей запятой в секунду (MFLOPS). Все вычисления проводились со словами длиной 8 байт.

Таймирование выполнения разработанного программного обеспечения проводилось на процессорном элементе системы MBC-1000M (Alpha21264A, 667 МГц) в Межведомственном Суперкомпьютерном Центре (<http://www.jscc.ru>) и на процессорном элементе системы MBC-1000/16 (Pentium III, 800 МГц) в ИАПУ ДВО РАН (<http://www.dvo.ru/bbc/hardware>). Для подготовки выполняемого кода применялись компилятор Compaq's C V6.2-506 for Linux Alpha и компилятор PGI Workstation-3.1 (для процессора Pentium). Построение выполняемого кода проводилось с ключом уровня оптимизации - fast.

Процессор; частота	Алгоритм		
	(11), (14)-(17)	(9), (19)-(28)	(9), (19)-(30)
Pentium III; 800 МГц	41,53 с 440 MFLOPS	20,72 с 410 MFLOPS	11,62 с 400 MFLOPS
Alpha212 64A; 667 МГц	21,40 с 860 MFLOPS	11,46 с 740 MFLOPS	6,18 с 750 MFLOPS

Таблица 2. Результаты таймирования разработанных алгоритмов

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ в области фундаментального естествознания (грант № Е-00-0.4-120) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-07-90225).

Список литературы

1. Новожилов В.В. *Теория упругости* - Л.: Судпромгиз, 1958. – 872с.

Содержание:

Академик РАН. Никита Федорович Морозов	5
Аганин А.А., Гусева Т.С., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г. Устойчивость сильного сжатия сферического пузырька	7
Аганин А.А., Ильгамов М.А. Простейшая модель вязкости в динамике жидкости с цилиндрической полостью	14
Аннин Б.Д., Смирнов С.В., Анненков В.А. Идентификация анизотропных материалов	21
Аргатов И.И. Асимптотическое моделирование сосредоточенных сил в плоской теории упругости	29
Арутюнян Р.А., Бражникова Н.В., Нанзай Ю. Упруго-вязкая модель стареющей полимерной среды	37
Бабешко В.А., Бабешко О.М., Вильямс Р. К проблеме переноса загрязняющих веществ конвективными движениями атмосферы	44
Белоконь А.В., Белоконь О.А. О существовании обратных волн в неоднородной задаче Лява	51
Блехман И.И., Дресиг Х., Шишкина Е.В. Об индийской магической веревке	58
Большаков А.В., Гольдштейн Р.В. Моделирование процессов деформирования гибких трубок при наличии ограничений на смещения	64
Горшков А. Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Воздействие локальных синусоидальных нагрузок на круговые трехслойные пластины	69
Горячева И.Г., Торская Е.В. Анализ напряженного состояния и разрушения тел с покрытиями в условиях контактного взаимодействия	75
Греков М.А. Два подхода к анализу криволинейных трещин	82
Гринченко В.Т. Особенности формирования волновых полей в неоднородных упругих волноводах	90

Даль Ю.М. Разрушение твердых тел в агрессивных газах	97
Демидова И.И. Разрушение составных тел при действии нагрузок	105
Еремеев В.А., Фрейдин А.В., Шарипова Л.Л. О центрально-симметричных двухфазных полях деформаций	111
Зимин Б.А., Темнов О.В. Некоторые аспекты математической обработки результатов по расслоению композиционных материалов	123
Зубов Л.М. О больших деформациях изгиба и кручения упругих оболочек, имеющих форму винтовой поверхности	130
Зубчанинов В. Г. Гипотеза ортогональности в теории пластичности	137
Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А. Динамические эффекты, сопутствующие диффузионной гомогенизации в тонкостенных системах	141
Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д., Максимова Л.А. О свойствах моделей изотропных сред	149
Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Новый принцип формулирования меры деформации	154
Канель Г.И., Разоренов С.В., Фортов В.Е. Упругопластические и прочностные свойства металлов и сплавов при повышенных температурах и высоких скоростях ударно-волнового деформирования	159
Кошелев А.И. О регулярности вплоть до границы напряжений в линейной теории упругости	166
Кривцов А.М. Исследование методом частиц разрушения шара под действием сферической волны растяжения	173
Колмогоров В. Л., Спесак Л. Ф., Бабайлов Н. А., Плотников А. Ю. К решению краевых задач течения материалов	179
Кукушкин С.А. Начальные стадии хрупкого разрушения твердых тел	186
Куропатенко В.Ф. Методы расчета ударных волн	200

Мальков В.М. Динамическое кручение цилиндрического шарнира из неогуковского материала	208
Матвиенко Ю.Г. О критерии и нестабильном хрупком разрушении тела с трещиной конечных размеров	214
Мелешко В.В. Опорные реакции в жестко заземленной прямоугольной пластинке	220
Назаров С.А. Неравенство Корна для упругого соединения тела со стержнем	234
Нарбут М.А. Диффузионные модели накопления повреждений в условиях ползучести	241
Никитин Л.В. Устойчивость круговой упругой крепи под давлением окружающей среды	248
Осмоловский В.Г. Состояния равновесия слоистых двухфазовых сред при заданных перемещениях на границе	254
Победря Б.Е. Структурные изменения в механике композитов	264
Рыбакина О.Г. Исследование критериев срагивания трещины в условиях сложного напряженного состояния	270
Смирнов А.Л., Товстик П.Е. Тонкие оболочки, подкрепленные нелинейно упругими шпями	277
Улитко А.Ф. Решение обобщенной системы уравнений типа Коши-Римана для сферической линзы	283
Федоровский Г.Д. Эндохронные критерии прочности, текучести и фазовой устойчивости	291
Черных К.Ф. Линейность или нелинейность? А если нелинейность, то какая?	299
Ragulskis K., Ragulskis L. A three-dimensional system with a free vibroexiter with dynamical directivity	308