

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской академии наук
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»

На правах рукописи

Спивак Юлия Эдуардовна

**ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ДИЗАЙНА УСТРОЙСТВ МАСКИРОВКИ ДЛЯ
МОДЕЛЕЙ МАГНИТОСТАТИКИ**

Специальность 1.2.2 — «Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор
Алексеев Геннадий Валентинович

Владивосток — 2022

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Теоретический анализ задачи сопряжения для модели магнитостатики	14
1.1 Дифференциальные уравнения и краевые условия сопряжения для модели магнитостатики	14
1.2 Постановка и теоретический анализ задачи сопряжения для 2D модели магнитостатики	19
1.3 Постановка и теоретический анализ задачи сопряжения для 3D модели магнитостатики	27
Глава 2. Исследование двумерных задач магнитной маскировки многослойными оболочками	34
2.1 Постановка прямой и обратной задач для двумерной модели магнитостатики	34
2.2 Частный случай двухслойной маскировочной оболочки	38
2.3 Применение оптимизационного метода. Формулировка экстремальных задач	40
2.4 Численный алгоритм на основе метода роя частиц	43
2.5 Анализ результатов вычислительных экспериментов	44
2.6 Случай анизотропной маскировочной оболочки	57
Глава 3. Численное решение 3D задачи дизайна осесимметричной магнитной маскировочной оболочки	63
3.1 Постановка прямой и обратной задач	63
3.2 Случай постоянного внешне приложенного поля	66
3.3 Применение оптимизационного метода. Формулировка экстремальных задач	69
3.4 Анализ результатов вычислительных экспериментов	73
3.5 Случай сферической анизотропной маскировочной оболочки	82

Заключение	89
Список литературы	91

Введение

Актуальность тематики исследования в диссертационной работе¹ вытекает, с одной стороны, из новизны, важности и сложности, рассматриваемых в диссертации математических и прикладных задач, а, с другой стороны, – из возможности приложения полученных результатов в ряде важных прикладных областей. В качестве некоторых из них можно отметить задачи маскировки материальных тел, задачи дизайна медицинских магнитно-чувствительных устройств, магнитно-резонансная томография (МРТ), транскраниальная магнитная стимуляция (ТМС), задачи проектирования устройств беспроводной передачи энергии и данных.

В последние годы стало бурно развиваться новое направление в теории обратных задач для уравнений электромагнетизма и акустики, связанное с решением важных прикладных задач, возникающих при создании невидимых или нерассеивающих пространственных структур, делающих любой расположенный внутри указанной пространственной структуры объект невидимым для электромагнитных или акустических волн. Первые результаты по данной проблеме, опубликованные в работах J.V. Pendry et al. [106] и U. Leonhardt [96], были посвящены исследованию проблем электромагнитной невидимости. Указанные авторы разработали оригинальный математический метод, названный ими методом координатных преобразований (МКП), решения задач дизайна устройств невидимости в виде объемных оболочек, служащих для маскировки материальных тел от их обнаружения средствами электромагнитной локации.

Далее, в работе [75], опубликованной в 2007 г., МКП был применен для решения задач акустической маскировки и других видов волновой маскировки, а с 2008 г. он стал применяться для решения задач маскировки материальных тел относительно статических (тепловых, магнитных и электрических) полей (см. [67; 77; 79; 81; 83; 85; 90; 95; 105; 107]). Параллельно этому развивалось направление, посвященное применению МКП для решения задач дизайна и других функциональных устройств в виде материальных оболочек. К ним можно отнести концентраторы, служащие для накопления энергии, вращательные оболочки, служащие для вращения волновых либо статических полей, устройства

¹Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90039 “Аспиранты”; при поддержке Российского научного фонда № 22-21-00271.

иллюзиона или камуфляжа и ряд других специальных устройств. Детальный обзор соответствующих работ можно найти в монографиях [6; 15]. Отметим также работы [27; 37; 38], в которых развиваются альтернативные подходы к решению задач маскировки в акустике и рентгеновской томографии. Подчеркнем, что полученные с помощью МКП решения задач маскировки обладают рядом существенных недостатков. Основной их недостаток связан с практической невозможностью технической реализации полученных с помощью МКП решений, поскольку они описывают отсутствующие в природе материалы с весьма экзотическими свойствами. С учетом того, что задачи маскировки, как и задачи дизайна, относятся к обратным задачам, некоторые исследователи, начиная с 2009 г., стали применять для решения задач дизайна маскировочных оболочек методы оптимизации.

Оптимизационный метод решения обратных задач для дифференциальных уравнений впервые был предложен в фундаментальных работах выдающегося советского ученого – академика А.Н. Тихонова в 60-е годы 20-го века в процессе создания им получившего мировую известность метода регуляризации некорректных задач, к классу которых относятся указанные обратные задачи. После этого оптимизационный метод стал широко применяться при решении обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе и для тех дифференциальных уравнений, которые широко используются в гидродинамике, теплопереносе, электромагнетизме, акустике и других прикладных областях.

В 60-е годы в нашей стране были созданы три основные школы мирового уровня по обратным задачам. Они возглавлялись академиком А.Н. Тихоновым в Москве, академиком М.М. Лаврентьевым в Новосибирске и чл.-корр. АН СССР В.К. Ивановым в Свердловске (ныне Екатеринбурге). В настоящее время указанные школы, возглавляемые уже их учениками (А.Г. Яголой, А.Б. Бакушинским, А.М. Денисовым, А.В. Тихонравовым и другими учениками А.Н. Тихонова в Москве), учениками М.М. Лаврентьева: В.Г. Романовым и С.И. Кабанихиным в Новосибирске, учеником В.К. Иванова В.В. Васиным в Екатеринбурге, продолжают успешно функционировать в области исследования обратных и некорректных задач математической физики.

Большое количество школ по обратным задачам и по применению оптимизационного метода для решения обратных задач имеется за рубежом: в США, Германии, Австрии, Японии, Турции и ряде других стран.

Начиная с 60-х годов прошлого столетия, опубликовано огромное количество работ (как оригинальных статей, так и монографий) в области разработки методов решения обратных задач, в том числе и по применению оптимизационного метода. Отметим среди этих работ монографии [31; 32; 35; 39; 44–47; 68; 78; 88; 91; 121], которые либо целиком посвящены оптимизационному методу, либо содержат отдельные главы по применению оптимизационного метода для решения обратных задач.

Подчеркнем, что в первых работах [109] и [123] по применению оптимизационного метода для решения задач маскировки, выполненных в 2009 г., в качестве метода численной оптимизации использовались соответственно итерационный алгоритм Бroyдена-Флетчера- Гольдфарба-Шанно (L-BFGS-B алгоритм) и генетический алгоритм. В дальнейшем, наряду с генетическим алгоритмом, исследователи стали использовать и методы глобальной оптимизации, типа метода роя частиц, а начиная с работы [64], опубликованной в 2011 г., и метод топологической оптимизации (см. [81; 105; 107]).

В настоящее время оптимизационное направление в теории невидимости продолжает активно развиваться, в том числе и в работах научного руководителя Г.В. Алексеева и его учеников. Первые их работы посвящены теоретическому анализу задач маскировки материальных тел относительно электромагнитных и акустических полей на основе оптимизационного метода. Указанный анализ включает в себя сведение исходных обратных задач маскировки к обратным экстремальным задачам, доказательство их разрешимости, вывод систем оптимальности и на основе ее анализа исследование вопросов локальной единственности и устойчивости оптимальных решений (см. об этом в [1–5; 9; 10; 16; 18; 49]). Кроме того, в [7; 11; 22; 26; 33; 42] аналогичный оптимизационный анализ был применен для исследования задач маскировки относительно статических полей, а в [12; 13] на основе указанного анализа были разработаны эффективные численные алгоритмы решения двумерных и трехмерных задач тепловой маскировки. В последних работах (см. [14; 60; 61]) авторам удалось на основе предварительно установленной априорной информации о свойствах решений экстремальных задач улучшить разработанные алгоритмы и с их помощью получить оптимальные решения, обладающие не только высокой маскировочной эффективностью, но и простотой технической реализации.

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование краевых задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики, рассмат-

риваемых при условиях сопряжения на границах неоднородных анизотропных в общем случае сред; разработка, анализ и программная реализация эффективных численных алгоритмов решения задач дизайна устройств маскировки для 2D и 3D моделей магнитостатики на основе оптимизационного метода и метода роя частиц.

Для реализации изложенной цели и получения новых научных результатов необходимо решить следующие **задачи**:

- исследовать теоретические вопросы, связанные с доказательством однозначной разрешимости прямых краевых задач для 2D и 3D моделей магнитостатики;

- разработать математический аппарат, основанный на оптимизационном методе, для решения обратных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах неоднородных анизотропных в общем случае сред. В частности, свести обратные задачи для рассматриваемых моделей магнитостатики к экстремальным задачам для соответствующих моделей и исследовать свойства их решений;

- разработать эффективные численные алгоритмы решения экстремальных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, основанные на использовании метода роя частиц. Исследовать свойства разработанных алгоритмов, выполнить их программную реализацию и тестирование;

- выполнить и проанализировать вычислительные эксперименты, направленные на решение задач дизайна маскировочных и экранирующих устройств, обеспечивающих невидимость (и экранирование) материальных тел относительно статических магнитных полей. Исследовать влияние значений геометрических и физических параметров проектируемых оболочек на важнейшие свойства оптимальных решений рассматриваемых задач, и, в частности, на маскировочную или экранирующую эффективность и простоту технической реализации. Установить наиболее эффективные механизмы управления статическими магнитными полями.

Научная новизна заключается в получении фундаментальных результатов в области теоретического анализа новых краевых задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах раздела сред. Она также связана с разработкой высокоточных алгоритмов численного решения обратных задач, возникающих при разработке технологий дизайна средств маскировки и экранирования материальных тел относительно

статических магнитных полей. При разработке эффективных численных алгоритмов существенно используются предварительно установленные свойства оптимальных решений в зависимости от выбора функционала качества и множества управлений, на котором он минимизируется. Именно использование этой идеи позволяет найти приближенные решения рассматриваемых обратных задач, которые, с одной стороны, обладают высокой маскировочной или экранирующей эффективностью, а с другой стороны, простотой технической реализации в виде оболочек, состоящих из конечного числа изотропных или анизотропных слоев, заполненных магнитными средами.

Практическая значимость Результаты, полученные при выполнении диссертационного исследования, имеют высокую прикладную и общественную значимость и могут быть широко использованы как в областях математической физики и вычислительной математики, так и в экономике и социальной сфере. В частности, результаты, полученные при решении задач дизайна устройств магнитной невидимости, могут найти потенциальные применения в таких медицинских технологиях, в которых используемые магнитные поля должны иметь заданную структуру и не допускать возмущений различного рода присутствующими магнитными объектами. Примерами таких медицинских технологий являются магнитно-резонансная томография и транскраниальная магнитная стимуляция.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе теоретическое исследование краевых задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах неоднородных анизотропных в общем случае сред, основывается на введении слабых вариационных формулировок рассматриваемых задач сопряжения и доказательстве корректной разрешимости соответствующих вариационных задач с помощью теоремы Лакса-Мильграма [22; 42].

Исследование обратных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, возникающих при разработке технологий дизайна средств маскировки и экранирования материальных тел относительно статических магнитных полей, основывается на оптимизационном методе. Сущность его состоит во введении специального функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче, и последующей замене исходной обратной задачи задачей нахождения его условного экстремума. В результате исходная обратная задача сводится к теоретическому исследованию и решению мно-

гопараметрической экстремальной задачи. В качестве искомым управлений выбираются неизвестные функциональные параметры среды – магнитные проницаемости изотропных или анизотропных сред, заполняющих круговые слои, составляющие маскировочное устройство, входящие коэффициентами в дифференциальные уравнения рассматриваемых моделей магнитостатики. Роль функционала качества обычно играет среднеквадратичная норма разности заданного и искомого полей, взятая по некоторой области пространства. Если, в частности, на решении экстремальной задачи указанный функционал обращается в нуль, то это может означать, что оптимальное решение совпадает с точным решением исходной обратной задачи. Важно, что нулевое значение функционала качества может достигаться лишь в исключительных случаях. Тем не менее, при определенном выборе множества управлений можно достичь достаточно малого значения функционала качества. Важно отметить, что при соответствующем выборе функционала качества указанное ненулевое значение функционала удается связать обратной зависимостью с важной характеристикой (маскировочной эффективностью) маскировочного устройства, отвечающего соответствующему оптимальному решению: чем ближе к нулю значение функционала качества, тем выше маскировочная эффективность соответствующего устройства, и наоборот. Для обеспечения достаточной малости минимального значения функционала качества, и, следовательно, высокой маскировочной или экранирующей эффективности устройства, отвечающего полученному оптимальному решению, необходимо использовать дополнительную информацию о свойствах оптимальных решений. Именно описанная выше методология используется в диссертации при решении задач дизайна устройств маскировки и экранирования материальных тел относительно статических магнитных полей.

Основные положения, выносимые на защиту.

Результаты настоящей работы, дополняющие и обобщающие полученные выводы в публикациях отечественных и зарубежных исследователей, являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказательство однозначной разрешимости новых краевых задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики.
2. Математический аппарат, основанный на оптимизационном методе, исследования обратных задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики, возникающих при разработке технологий дизайна средств маскировки

и экранирования материальных тел относительно статических магнитных полей.

3. Разработка эффективных численных алгоритмов решения экстремальных задач для 2D и 3D моделей магнитостатики, основанных на использовании метода роя частиц.

4. Комплекс программ, реализующих разработанные численные алгоритмы, основанные на оптимизационном методе и методе роя частиц, позволяющих эффективно численно решать обратные экстремальные задачи дизайна устройств маскировки и экранирования для 2D и 3D моделей магнитостатики.

Достоверность полученных результатов, положений и выводов диссертационной работы обеспечивается использованием строгих математических рассуждений при доказательстве сформулированных в главе 1 теорем, прозрачной аргументацией принятых ограничений, применением апробированных численных методов и средств компьютерного моделирования и верификацией построенных алгоритмов, а также сравнительным анализом полученных результатов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования регулярно докладывались и обсуждались на научных семинарах Института прикладной математики ДВО РАН и Департамента математического и компьютерного моделирования Института математики и компьютерных технологий Дальневосточного федерального университета. Кроме того, результаты работы были представлены самостоятельно и с соавторами на: 11 международных, 3 всероссийских и 2 региональных конференциях, в том числе на 5-ой Международной конференции “Pacific Rim Underwater Acoustics Conference (PRUAC)” в 2015 г. (г. Владивосток, Россия), Международной конференции “International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)” в 2016 г. (г. Кэрнс, Австралия), в 2017 г. (г. Верона, Италия) и в 2019 г. (г. Гранада, Испания), 9-ой Международной конференции “Discrete Optimization and Operations Research and Scientific School (DOOR)” в 2016 г. (г. Владивосток, Россия), Международном симпозиуме “Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS)” в 2017 г. (г. Санкт-Петербург, Россия) и в 2018 г. (г. Тояма, Япония), Всероссийской конференции “Нелинейные волны: теория и новые приложения” в 2016 г. (г. Новосибирск, Россия), Международной конференции “Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения” в 2019 г. (г. Пенза, Россия), Всероссийской научно-технической конференции “Техни-

ческие проблемы освоения мирового океана (ТПОМО)” в 2017 и 2019 гг. (г. Владивосток, Россия), Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам в 2016 и 2019 гг. (г. Владивосток, Россия), Международной конференции по промышленному инжинирингу и современным технологиям (FarEastCon) в 2020 и 2021 гг. (г. Владивосток, Россия).

Связь работы с научными темами и программами. Основные результаты диссертационной работы были получены автором при проведении исследований, выполненных в рамках научных тем: государственное задание ИПМ ДВО РАН (тема № 075-01095-20-00) в 2020–2022 гг.; проект № 19-31-90039 “Аспиранты”, получивший поддержку РФФИ по результатам конкурсного отбора научных проектов, выполняемых молодыми учеными, обучающимися в аспирантуре, в 2019–2021 гг.; Дальневосточный центр математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-02-2021-1395 от 01.06.2021, соглашение № 075-02-2022-880 от 31.01.2022) в 2021–2022 гг.; грант РНФ № 22-21-00271 в 2022 г.

Личный вклад. Рассматриваемые в работе задачи были поставлены научным руководителем. Все результаты, изложенные в диссертации, были получены при непосредственном участии соискателя Ю.Э. Спивак на всех этапах работы. Автору принадлежит существенная часть в разработке численных алгоритмов решения обратных экстремальных задач маскировки для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики. Программная реализация разработанных численных алгоритмов, их анализ и вычислительные эксперименты по нахождению решений рассматриваемых задач автором осуществлены самостоятельно.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 27 научных работах, из них 6 статей в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России; 15 материалов конференций в изданиях, индексируемых международными базами научного цитирования Scopus и Web of Science; 6 публикаций в сборниках материалов и тезисов конференций; получены 5 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 103 страницы, включая 8 рисунков и 22 таблицы. Список литературы содержит 123 наименования.

Краткое содержание диссертационной работы:

Введение включает в себя характеристику актуальности и новизны диссертационной работы, формулировку основной цели и научные задачи исследования, отражает структуру и методологию диссертации, обзор предыдущих исследований по данной теме работы и результаты, выносимые на защиту. Также приведены сведения об апробации результатов в виде публикаций и докладов на научных конференциях.

Первая глава посвящена формулировкам краевых задач для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах неоднородных анизотропных в общем случае сред, и теоретическому анализу их однозначной разрешимости.

Во второй главе численно исследуются обратные задачи магнитостатики, возникающие при проектировании двумерных многослойных экранирующих и маскировочных устройств. С помощью оптимизационного метода рассматриваемые обратные задачи сводятся к конечномерным экстремальным задачам, в которых роль управлений играют параметры изотропных или анизотропных сред, заполняющих круговые слои, составляющие искомое маскировочное устройство. Предлагается численный алгоритм их решения, основанный на оптимизационном методе и методе роя частиц, обсуждаются результаты вычислительных экспериментов и выполняется их сравнительный анализ.

В третьей главе формулируются обратные задачи для трехмерной модели магнитостатики, возникающие при проектировании осесимметричных многослойных экранирующих и маскировочных устройств. В предположении, что проектируемое устройство состоит из конечного числа элементарных сферических слоев, каждый из которых заполнен изотропной или анизотропной средой, предлагается численный алгоритм решения указанных задач, основанный на оптимизационном методе и методе роя частиц. На основе анализа проведенных вычислительных экспериментов показывается, что полученным оптимальным решениям отвечают маскировочные устройства, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и простотой технической реализации.

В заключении сформулированы основные результаты работы и обозначены перспективы дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Геннадию Валентиновичу Алексееву за помощь и поддержку на всех этапах в процессе обучения и научной деятельности.

Глава 1. Теоретический анализ задачи сопряжения для модели магнитостатики

1.1 Дифференциальные уравнения и краевые условия сопряжения для модели магнитостатики

Как уже указывалось во Введении, одной из целей данной диссертации является разработка эффективных численных алгоритмов решения задач дизайна устройств маскировки для моделей магнитостатики. Хорошо известно, что задачи маскировки в случае статических полей допускают более простое исследование, поскольку в этом случае можно разделить магнитный и электрический эффекты. В силу этого эффект маскировки достигается за счет выбора компонент тензора относительной магнитной проницаемости в случае магнитостатических полей либо за счет выбора компонент тензора относительной диэлектрической проницаемости в случае электростатических полей.

Схема маскировки статических магнитных полей, основанная на методе координатных преобразований (МКП), была предложена в [48; 101; 122]. Как и каждая схема, основанная на МКП, она обладает рядом недостатков, присущих этому методу и связанных, в частности, с необходимостью использования сингулярных значений тензорных компонент магнитной проницаемости. Далее, в [67] была предложена схема приближенного дизайна маскировочной оболочки, свободная от указанного недостатка, но позволяющая проектировать маскировочные оболочки лишь приближенно. Более того, для увеличения точности маскировочной оболочки в [67] было предложено использовать несколько дискретных слоев, каждый из которых заполнен однородной изотропной средой. Наконец, в работах [79; 118] была предложена точная схема маскировки магнитостатических полей, основанная, скорее, не на МКП, а на принципе компенсации электромагнитного рассеяния.

Подчеркнем, что все из указанных схем магнитной маскировки основаны на использовании математических моделей магнитостатики, рассматриваемых при условиях сопряжения на границах раздела сред [6]. С учетом этого данную главу мы посвятим формулировкам соответствующих краевых задач для 2D и 3D моделей магнитостатики и анализу их однозначной разрешимости.

Предварительно рассмотрим фундаментальное теоретическое понятие – электромагнитное поле. С математической точки зрения под электромагнитным полем можно понимать набор вектор-функций \mathbf{E} (либо \mathbf{D}), \mathbf{H} (либо \mathbf{B}), \mathbf{J} и скалярной функции ρ_e , называемых соответственно вектором напряженности (либо индукции) электрического поля, вектором напряженности (либо индукции) магнитного поля, вектором плотности электрического тока и плотностью электрических зарядов в среде, удовлетворяющих в области Ω определенным дифференциальным и функциональным уравнениям.

Эти уравнения носят название уравнений Максвелла по имени выдающегося английского физика D. Maxwell (1831 – 1879 гг.), который впервые вывел их в XIX веке. Эти уравнения, полученные Максвеллом путем обобщения известных к тому времени законов электричества и магнетизма и устранения имеющихся в них противоречий, в современной записи имеют (в системе СИ) вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.1) является дифференциальным следствием основного закона электростатики – закона Кулона по имени французского физика S.O. Coulomb (1736-1806 гг.). Уравнение (1.2) является математическим отражением известного физического факта об отсутствии магнитных зарядов как источников магнитного поля. Уравнение (1.3) является следствием закона электромагнитной индукции Фарадея, названного так в честь известного английского физика – первооткрывателя явления электромагнитной индукции M. Faraday (1791 – 1867 гг.). Согласно этому закону всякое переменное во времени магнитное поле индуцирует связанное с ним электрическое поле (имеющее в отличие от электростатического поля вихревой характер) и выражает количественную характеристику вихря индуцированного поля. Наконец, уравнение (1.4) представляет собой обобщение дифференциальной формы

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.5)$$

известного закона Био – Савара, названного так в честь французских физиков J.V. Biot (1774 – 1862 гг.) и F. Savart (1791 – 1841 гг.), открывших его в 1820 г.

Он выражает зависимость напряженности магнитного поля от плотности создающего его тока. Уравнение (1.4) отличается от (1.5) дополнительным членом $\partial \mathbf{D} / \partial t$, введенным Максвеллом. Указанный член имеет размерность плотности тока и называется плотностью токов смещения. Таким образом, из (1.4) следует, что магнитное поле может создаваться не только электрическим током, но и переменным во времени электрическим полем. В совокупности уравнения (1.3) и (1.4) означают, что нестационарные электрические или магнитные поля не могут существовать в пространстве отдельно, независимо друг от друга, а образуют две стороны единого электромагнитного поля.

Важно отметить, что уравнения Максвелла образуют точную универсальную систему дифференциальных уравнений электромагнитного поля, т. е. абсолютно точно описывают электромагнитные процессы в любой среде. Однако система (1.1) – (1.4) не является замкнутой, поскольку число неизвестных функций в ней превосходит число уравнений. Чтобы замкнуть систему (1.1) – (1.4), к ней необходимо присоединить дополнительные уравнения, вид которых уже целиком определяется свойствами среды, в которой рассматривается электромагнитное поле. Указанные уравнения, называемые материальными уравнениями электромагнитного поля, во многих случаях имеют следующий вид (в системе СИ):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{ct}. \quad (1.6)$$

Здесь ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, определяемые (приближенно) формулами:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}}, \quad (1.7)$$

где Φ и Γ_{H} – сокращенные обозначения фарады и генри как единиц размерностей, ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ – удельная проводимость среды, \mathbf{J}^{ct} – заданная функция, имеющая смысл плотности токов, происходящих от действия сторонних электродвижущих сил. Последнее уравнение в (1.6) является дифференциальной формой закона Ома, связывающего силу тока, протекающего в электрическом проводнике, с падением напряжения на нем. Указанный закон открыл в 1826 г. известный немецкий физик G.S. Ohm (1787 – 1854 гг.). Отметим, что тип и свойства величин ε , μ и σ , входящих в материальные уравнения (1.6), существенно зависят от типа среды, в которой рассматривается электрическое поле. В этой связи

напомним, что среда, занимающая область Ω , называется однородной, если ее свойства не меняются при переходе от одной точки $\mathbf{x} \in \Omega$ к другой. Среда называется изотропной в точке \mathbf{x} , если ее свойства одинаковы по всем направлениям, выходящим из точки \mathbf{x} , и анизотропной в противном случае. В случае однородной изотропной среды величины ε , μ и σ являются константами, причем $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\sigma \geq 0$. В частности, для вакуума $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$. Если среда неоднородна, то ε , μ и σ являются скалярными функциями координат точек среды, если к тому же среда анизотропна, то эти функции становятся тензорными.

Если среда кусочно-однородна, то уравнения (1.1) – (1.4), (1.6) следует использовать в каждом однородном куске среды. На границе Γ_s раздела двух сред нужно использовать так называемые условия сопряжения. В общем случае указанные условия имеют вид [34, с. 31], [76, vol. 1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_s, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \rho_s \text{ на } \Gamma_s, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \text{ на } \Gamma_s. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены предельные значения векторов поля при приближении к поверхности раздела соответственно со стороны сред 1 и 2, \mathbf{J}_s и ρ_s – поверхностные плотности токов и зарядов на границе раздела, \mathbf{n} – единичный вектор нормали, направленный от среды 1 к среде 2. Условия (1.8) легко выводятся с использованием интегральных аналогов уравнений Максвелла.

Ниже мы будем рассматривать уравнения Максвелла в частном случае, когда электрическое поле отсутствует, так что $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$, плотность электрических токов \mathbf{J} равно нулю, а магнитное поле не зависит от времени и описывается уравнениями магнитостатики, имеющими вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu^0 \mu \mathbf{H}. \quad (1.9)$$

Условие $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ позволяет ввести магнитный потенциал Φ , с которым выполняется соотношение

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi. \quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) следует, что Φ является решением уравнения

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \Phi) = 0, \quad (1.11)$$

переходящего при $\mu = \operatorname{const}$ в уравнение Лапласа

$$\Delta \Phi \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0. \quad (1.12)$$

Основываясь на соотношениях (1.8)-(1.12), мы сформулируем и исследуем ниже в этой главе краевую задачу сопряжения, отвечающую физическому сценарию внесения магнитной оболочки в плоскость или пространство с целью маскировки внешне приложенных магнитных полей. Полученные результаты будут в дальнейшем использоваться при решении задач дизайна 2D и 3D магнитных маскировочных оболочек.

Нужно отметить, что задача построения магнитных маскировочных оболочек имеет не только научный интерес, но и весьма важные приложения. Это связано с тем, что магнитные поля играют основную роль в большом числе различных технологических процессов, и в частности в инженерных и медицинских технологиях. Среди последних отметим такие, например, как магнитно-резонансная томография [110] или транскраниальная магнитная стимуляция [94; 102]. Во многих из них магнитное поле должно иметь нужное пространственное распределение, которое не должно возмущаться различными магнитными объектами, в том числе материалами, содержащими железо и сталь. Указанные обстоятельства говорят о безусловной важности рассматриваемой ниже проблемы дизайна маскировочных оболочек для статических магнитных полей.

Начиная с пионерских работ [29; 96; 106], устройства невидимости и метаматериалы являются предметом обширных исследований среди физиков и математиков, о чем свидетельствует большой цикл работ, выполненный в этой области. В первых статьях этого цикла были предложены различные подходы для решения задач электромагнитной маскировки материальных тел, основанные на разработанном в [106] МКП. Позже основные результаты из теории электромагнитной маскировки были перенесены на случай акустической маскировки [69; 75; 111], а далее на случай маскировки от статических магнитных, электрических либо тепловых полей.

В частности, ряд работ (см., например, [67; 122]) посвящен дизайну средств магнитной невидимости в виде специальной маскировочной оболочки. На основе разработанного дизайна в [122] было построено решение, для которого магнитные проницаемости μ_r и μ_φ маскировочной оболочки, имеющей вид кольца $a < r < b$, определяются формулами

$$\mu_r = \frac{r - a}{r}, \quad \mu_\varphi = \frac{r}{r - a}. \quad (1.13)$$

Следует, однако, отметить, что решение в виде (1.13) обладает рядом недостатков. Основной из них связан с сингулярностью поведения компонент μ_r и μ_φ

на внутренней границе оболочки $r = a$, поскольку $\mu_\varphi \rightarrow \infty$, $\mu_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow a$. Ясно, что техническая реализация полученных решений связана с огромными трудностями, а фактически не представляется возможной из-за отсутствия в природе материалов, отвечающих найденным решениям. Не менее сложные проблемы с реализацией решений возникают и в случае электромагнитной либо акустической маскировки [6, гл. 1], [30].

Один из способов преодоления указанных трудностей состоит в замене точных решений задачи маскировки, описывающих сингулярные параметры анизотропной среды, заполняющей искомую маскировочную оболочку, приближенными (несингулярными) параметрами и исследовании свойств маскировочных устройств на основе указанных приближений. Указанный подход развивался в ряде работ (см., например, [8; 38; 71; 87; 97]). Альтернативный подход основан на использовании оптимизационного метода решения обратных задач, к классу которых относятся задачи маскировки. Сущность этого подхода заключается в замене исходной обратной задачи задачей минимизации определенного функционала качества, адекватно отвечающего поставленной обратной задаче. Данный метод, на который в задачах маскировки ссылаются как на метод обратного дизайна [6; 86], применялся в работах [63; 109; 120], посвященных численному анализу 2D задач дизайна слоистых маскировочных оболочек, и в [2–4; 18; 49; 55] при теоретическом исследовании задач электромагнитной либо акустической маскировки. Работы [65; 66] посвящены изучению проблемы невидимости в томографии.

1.2 Постановка и теоретический анализ задачи сопряжения для 2D модели магнитостатики

Рассмотрим в \mathbb{R}^2 область Ω , имеющую в полярных координатах (r, φ) вид кольца $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b – положительные константы. Будем считать, что область Ω заполнена неоднородной анизотропной, в общем случае, средой, магнитные свойства которой описываются тензором магнитной проницаемости $\boldsymbol{\mu}$, тогда как внутренность Ω_i и внешность Ω_e^∞ области Ω заполнены одной и той же однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$.

Предположим, что вне некоторого круга $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$, содержащего область Ω внутри себя, сосредоточены источники, создающие в B_R внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\text{grad } \Phi_a$, отвечающее потенциалу Φ_a . Наличие оболочки $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ приводит к появлению дополнительного поля Φ_s во внешности $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$, а также (суммарного) поля Φ_0 в области Ω и (суммарного) поля Φ_i во внутренней области $\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\}$ (см. рис. 1.1). Указанные поля Φ_i , Φ_0 и Φ_s являются решением задачи сопряжения, которая с учетом соотношений (1.8) – (1.12) принимает вид

$$\mu_0 \Delta \Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \mu_0 \Delta \Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (1.14)$$

$$\text{div}(\boldsymbol{\mu} \text{ grad } \Phi_0) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1.15)$$

$$\Phi_i = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu} \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ при } r = a,$$

$$\Phi_a + \Phi_s = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial (\Phi_a + \Phi_s)}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu} \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ при } r = b, \quad (1.16)$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Следуя [6; 67], будем ссылаться на (1.14) – (1.17) как на задачу магнитного сопряжения.

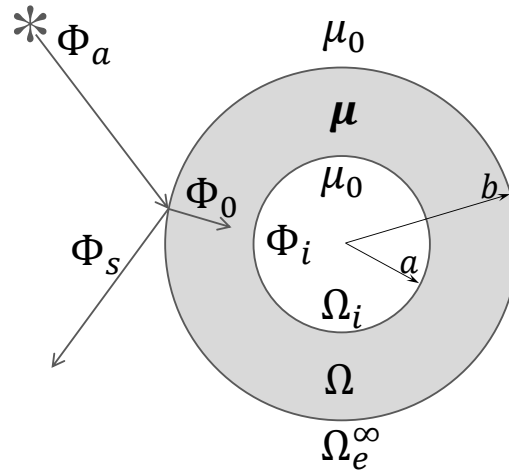


Рисунок 1.1 — Схематическое изображение внешне приложенного магнитного поля и кольцевой магнитной оболочки Ω .

При теоретическом исследовании задачи сопряжения (1.14) – (1.17) и задачи управления будем существенно использовать ряд функциональных пространств. Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$. Будем использовать пространство $H^1(D)$, где D – одна из областей B_R , Ω_i , Ω , Ω_e , а также пространства $L^\infty(\Omega)$, $H^s(\Omega)$, $s > 0$, $L^2(Q)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $Q \subset B_R$ – произвольное открытое

(i) тензор $\boldsymbol{\mu}$ диагонален в полярных координатах r, φ , а его диагональные компоненты (радиальная и угловая магнитные проницаемости) μ_r и μ_φ удовлетворяют условиям: $\mu_r \in L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega)$, $\mu_\varphi \in L_{\mu_\varphi^0}^\infty(\Omega)$, $\mu_r^0 = \text{const} > 0$, $\mu_\varphi^0 = \text{const} > 0$;

(ii) $\Phi^e \equiv \Phi_a|_{\Omega_e} \in H(\Omega_e)$.

Приведенное выше предположение (i) позволяет существенно упростить исследование сформулированной выше задачи магнитного сопряжения, записав уравнение для Φ_0 в (1.14) в полярных координатах r, φ . Действительно, напомним сначала, что в полярных координатах $\text{grad } \Phi_0$ и произведение диагонального (в полярных координатах) тензора $\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\mu_r, \mu_\varphi)$ на вектор $\text{grad } \Phi_0$ выражаются формулами (см, например, [6, с. с.101])

$$\text{grad } \Phi_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{\mu} \text{ grad } \Phi_0 = \mu_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \mathbf{e}_r + \mu_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.20)$$

Здесь \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ – единичные векторы полярного базиса. Применяя к вектору $\boldsymbol{\mu} \text{ grad } \Phi_0$ операцию div для 2D векторного поля \mathbf{v} , приходим с учетом формулы для дивергенции в полярных координатах к уравнению

$$\text{div}(\boldsymbol{\mu} \text{ grad } \Phi_0) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mu_\varphi}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (1.21)$$

тогда как условия сопряжения (1.16) принимают вид

$$\Phi_i = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} = \mu_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \text{ при } r = a,$$

$$\Phi_a + \Phi_s = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial (\Phi_a + \Phi_s)}{\partial r} = \mu_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \text{ при } r = b. \quad (1.22)$$

В результате исходная задача сопряжения (1.14) – (1.17) свелась к нахождению тройки функций: Φ_i в Ω_i , Φ_0 в Ω и Φ_s в Ω_e^∞ , удовлетворяющих уравнениям (1.14) в $\Omega_i \cup \Omega_e^\infty$, (1.21) в Ω , условиям сопряжения (1.22) и условию на бесконечности (1.17). Для краткости ниже на задачу (1.14), (1.17), (1.21), (1.22) будем ссылаться как на задачу 1.

Поскольку потенциал Φ определяется с точностью до аддитивной константы, то условимся ниже не различать функции пространства $H^1(B_R)$, отличающиеся друг от друга на аддитивную константу. С учетом этого ниже основную роль будет играть фактор-пространство $X = H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ с нормой:

$$\|\Phi\|_X^2 = \|\nabla \Phi\|_{\Omega_i}^2 + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|_{\Omega}^2 + \|\nabla \Phi\|_{\Omega_e}^2. \quad (1.23)$$

Можно показать, что пространство $X = H^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ является гильбертовым по норме (1.23).

Следующий этап исследования сформулированной выше задачи 1 состоит в том, чтобы свести ее к эквивалентной краевой задаче, рассматриваемой в ограниченной области B_R . С этой целью введем аналогично [3; 49; 84] оператор Дирихле-Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$, ставящий в соответствие каждой функции $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{\Phi}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{\Phi}$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения $\Delta\Phi = 0$ в $\Omega_e^\infty \setminus B_R$ при краевом условии $\Phi|_{\Gamma_R} = h$, удовлетворяющее условию (1.17). Хорошо известно, что $T \in L(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, $\|T\| \leq C_T$ и $\int_{\Gamma_R} (TS)S d\sigma \leq 0$ для всех $S \in H^{1/2}(\Gamma_R)$. Здесь и ниже интеграл \int_{Γ_R} обозначает отношение двойственности между $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{1/2}(\Gamma_R)$, C_T – константа, зависящая от Ω и R . Отметим, что задача 1, рассматриваемая на всей плоскости \mathbb{R}^2 , эквивалентна задаче нахождения тройки функций: Φ_0 из уравнения (1.21) в области Ω , Φ_i из первого уравнения в (1.14) в области Ω_i и Φ_s из уравнения $\mu_0\Delta\Phi_s = 0$ в Ω_e при условиях сопряжения (1.22) и следующем дополнительном условии для поля Φ_s на Γ_R :

$$\partial\Phi_s/\partial n = T\Phi_s \text{ на } \Gamma_R. \quad (1.24)$$

Ниже, наряду с уравнением для Φ_s , будем также использовать уравнение для функции $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s$, имеющее в силу условия $\Delta\Phi^e = 0$ в (ii) вид

$$\mu_0\Delta\Phi_e = 0 \text{ в } \Omega_e. \quad (1.25)$$

Для краткости ниже на задачу нахождения тройки функций (Φ_i, Φ_0, Φ_e) , удовлетворяющих первому уравнению (1.14) в Ω_i , (1.21) в Ω и (1.25) в Ω_e , а также граничным условиям (1.22) и (1.24), будем ссылаться как на задачу 1а.

Выведем теперь слабую формулировку (при заданных коэффициентах μ_r и μ_φ) задачи 1а. Пусть $S \in X$ – произвольная тестовая функция. Умножим первое уравнение в (1.14) и уравнение (1.25), рассматриваемые в областях Ω_i и Ω_e , на $S|_{\Omega_i}$ и $S|_{\Omega_e}$, соответственно, уравнение (1.21), рассматриваемое в Ω , – на $S|_{\Omega}$, проинтегрируем по $\Omega_i \cup \Omega_e$ либо по Ω и применим соответствующие формулы Грина. Складывая полученные тождества и используя граничные условия в (1.22) и (1.24), приходим к следующему тождеству для тройки $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e)$, где $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s$:

$$a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S) = \langle F, S \rangle \quad \forall S \in X. \quad (1.26)$$

Здесь и ниже μ обозначает пару (μ_r, μ_φ) , $a_0(\cdot, \cdot)$, $a(\mu_r, \mu_\varphi; \cdot, \cdot)$ и F – билинейные и линейная формы на X , определяемые формулами

$$a_0(\Phi, S) = \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla \Phi \cdot \nabla S d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} (T\Phi) S d\sigma, \quad (1.27)$$

$$a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S) = \int_{\Omega} \left(\mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\mu_\varphi}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi, \quad (1.28)$$

$$\langle F, S \rangle = - \int_{\Gamma_R} T\Phi^e S d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \Phi^e}{\partial n} S d\sigma. \quad (1.29)$$

Тождество (1.26) представляет собой слабую формулировку задачи 1а, а ее решение $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e) \in X$ будем называть слабым решением задачи 1а. Рассуждая, как в [3], несложно показать, что введенное слабое решение обладает свойством допустимости: оно удовлетворяет уравнениям (1.14) и (1.15) в смысле обобщенных функций, а также – граничным условиям (1.22) и (1.24) в смысле следов.

Используя неравенство Гельдера и формулу (1.23) для нормы $\|\cdot\|_X$, выводим оценки:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} r \mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r} dr d\varphi \right| &\leq \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega} \left\| \frac{\partial S}{\partial r} \right\|_{\Omega} \leq \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \Phi\|_{\Omega} \|\nabla S\|_{\Omega} \leq \\ &\leq \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_X \|S\|_X, \\ \int_{\Omega} \frac{\mu_\varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial S}{\partial \varphi} dr d\varphi &\leq \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|_{\Omega} \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right\|_{\Omega} \leq \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \Phi\|_{\Omega} \|\nabla S\|_{\Omega} \leq \\ &\leq \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_X \|S\|_X. \end{aligned}$$

Из этих оценок вытекает, что

$$|a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S)| \leq (\|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mu_\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\Phi\|_X \|S\|_X \quad \forall \Phi, S \in X. \quad (1.30)$$

Кроме того, используя (1.18), (1.19), выводим из (1.27)

$$\left| \int_{\Gamma_R} (T\Phi) S d\sigma \right| \leq \|T\Phi\|_{-1/2, \Gamma_R} \|S\|_{1/2, \Gamma_R} \leq C_T C_R^2 \|\Phi\|_X \|S\|_X, \quad (1.31)$$

$$|a_0(\Phi, S)| \leq (\mu_0 + C_T C_R^2) \|\Phi\|_X \|S\|_X, \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} |\langle F, S \rangle| &\leq (\|T\| \|\Phi^e\|_{1/2, \Gamma_R} + \|\partial \Phi^e / \partial n\|_{-1/2, \Gamma_R}) \|S\|_{1/2, \Gamma_R} \leq \\ &\leq (C_T C_R + C'_R) C_R \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e} \|S\|_X, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\left| \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla \Phi \cdot \nabla S d\mathbf{x} \right| \leq \mu_0 \|\Phi\|_X \|S\|_X. \quad (1.34)$$

Из этих оценок следует, что формы a_0 и F непрерывны на X , причем

$$\|a_0\| \leq C_0, \quad \|F\|_{X^*} \leq C_0 \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}, \quad C_0 = \max[\mu_0 + C_T C_R^2, (C_T C_R + C'_R) C_R]. \quad (1.35)$$

Здесь X^* – двойственное к X .

Предположим теперь, что $\mu_r \in L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega)$, $\mu_\varphi \in L_{\mu_\varphi^0}^\infty(\Omega)$, где $\mu_r^0 > 0$, $\mu_\varphi^0 > 0$.

Тогда имеем

$$\int_{\Omega} r \mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr d\varphi \geq \mu_r^0 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2, \quad \int_{\Omega} \frac{\mu_\varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} dr d\varphi \geq \mu_\varphi^0 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\|_{\Omega}^2,$$

$$a_0(\Phi, \Phi) = \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} (T\Phi)\Phi d\sigma \geq \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} |\nabla \Phi|^2 d\mathbf{x} \quad \forall \Phi \in X.$$

Из этих оценок и определения нормы (1.23) в пространстве X вытекает, что

$$a_\mu(\Phi, \Phi) \geq \bar{\mu} \|\Phi\|_X^2 \quad \forall \Phi \in X, \quad \bar{\mu} = \min(\mu_0, \mu_r^0, \mu_\varphi^0). \quad (1.36)$$

Отметим, что билинейная форма a_μ , введенная в (1.26), определяет линейный оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$, действующий по формуле

$$\langle A_\mu \Phi, S \rangle = a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\varphi; \Phi, S), \quad (1.37)$$

причем задача (1.26) эквивалентна операторному уравнению

$$A_\mu \Phi = F. \quad (1.38)$$

Из неравенств (1.30), (1.32) вытекает, что при выполнении условия (i) билинейная форма a_μ , введенная в (1.26), непрерывна на $X \times X$, а из (1.36) следует, что a_μ коэрцитивна на X . В таком случае, из теоремы Лакса-Мильграма [36, с. 386], [82, с. 6] вытекает, что оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$ – изоморфизм, причем обратный $A_\mu^{-1} : X^* \rightarrow X$ к нему также является изоморфизмом. Полагая $C_\mu = \|A_\mu^{-1}\|$, отметим, что в силу теоремы Лакса-Мильграма $C_\mu \leq C_1 = (1/\bar{\mu})$. С учетом этого выводим, что для любого элемента $F \in X^*$ операторное уравнение (1.38) имеет единственное решение $\Phi_\mu = A_\mu^{-1}(F) \in X$, для которого справедлива оценка $\|\Phi_\mu\|_X \leq C_1 \|F\|_{X^*}$. Отсюда следует в силу второй оценки в (1.35), что для любого поля $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ задача (1.26) имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X^*$, и справедлива оценка

$$\|\Phi_\mu\|_X \leq C_2 \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}, \quad C_2 = C_0 C_1. \quad (1.39)$$

Подчеркнем, что константы C_1 и C_2 в (1.39) зависят от констант R , μ_0 , μ_r^0 и μ_φ^0 , но не зависят от функций μ_r и μ_φ , удовлетворяющих условию (i). Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда для любой пары $\mu = (\mu_r, \mu_\varphi) \in L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega) \times L_{\mu_\varphi^0}^\infty(\Omega)$:

1) оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$, определенный в (1.37), осуществляет изоморфизм, причем для обратного оператора $A_\mu^{-1} : X^* \rightarrow X$ справедлива оценка $\|A_\mu^{-1}\| \leq C_1 \equiv (1/\bar{\mu})$, где константа $\bar{\mu}$ определена в (1.36);

2) для любого внешнего поля $\Phi^e \in H(\Omega_e)$ задача (1.26) имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X$, для которого справедлива оценка (1.39) с константой C_2 , не зависящей от (μ_r, μ_φ) .

Доказательство теоремы 1.1 приведено в работе [42], а также существенно используется в следующей серии работ [23; 24; 33; 51; 58; 100; 104].

Следствие 1.1. Приведенные выше результаты остаются справедливыми для решения аналогичной задачи сопряжения для двумерной модели электростатики [33; 100].

1.3 Постановка и теоретический анализ задачи сопряжения для 3D модели магнитостатики

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 область Ω , имеющую в сферических координатах (r, θ, φ) вид сферического слоя $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b – положительные константы. Будем считать, что область Ω заполнена неоднородной и анизотропной (в общем случае) средой, магнитные свойства которой описываются тензором магнитной проницаемости $\boldsymbol{\mu}$, тогда как внутренность Ω_i и внешность Ω_e^∞ области Ω заполнены одной и той же однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$. На пару $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ ниже будем ссылаться как на магнитную оболочку.

Обозначим через B_R шар $|\mathbf{x}| < R$ радиуса $R > b$, содержащий область Ω внутри себя. Предположим, что вне шара B_R сосредоточены источники, создающие в B_R внешне приложенное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\text{grad } \Phi_a$, отвечающее потенциалу Φ_a . Наличие оболочки $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ приводит к появлению полей Φ_i и Φ_0 в областях Ω_i и Ω и дополнительного поля Φ_s в Ω_e^∞ , на которое будем ссылаться как на (внешнее) рассеянное поле (см. рис. 1.3). Указанные поля Φ_i , Φ_0 и Φ_s являются решением следующей задачи магнитного сопряжения:

$$\mu_0 \Delta \Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \text{div}(\boldsymbol{\mu} \text{ grad } \Phi_0) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mu_0 \Delta \Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (1.40)$$

$$\Phi_i = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu} \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ при } r = a,$$

$$\Phi_a + \Phi_s = \Phi_0, \quad \mu_0 \frac{\partial (\Phi_a + \Phi_s)}{\partial n} = (\boldsymbol{\mu} \nabla \Phi_0) \cdot \mathbf{n} \text{ при } r = b, \quad (1.41)$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.42)$$

Для краткости ниже на задачу (1.40) – (1.42) будем ссылаться как на задачу 2.

В соответствии с физическим смыслом (см., например, [6, гл. 3]) магнитную оболочку $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ будем называть нерассеивающей во внешность Ω_e^∞ , если для решения (Φ_i, Φ_0, Φ_s) задачи (1.40) – (1.42) выполняется условие $\Phi_s = 0$, и идеальной маскировочной, если одновременно $\Phi_s = 0$ в Ω_e^∞ и $\Phi_i = 0$ в Ω_i .

Напомним, что в литературе существуют два основных типа точных решений задачи магнитной маскировки, описывающих идеальную маскировочную оболочку $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$. Первый тип отвечает диагональному в сферических координатах тензору $\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$, диагональные компоненты μ_r и $\mu_\theta = \mu_\varphi$

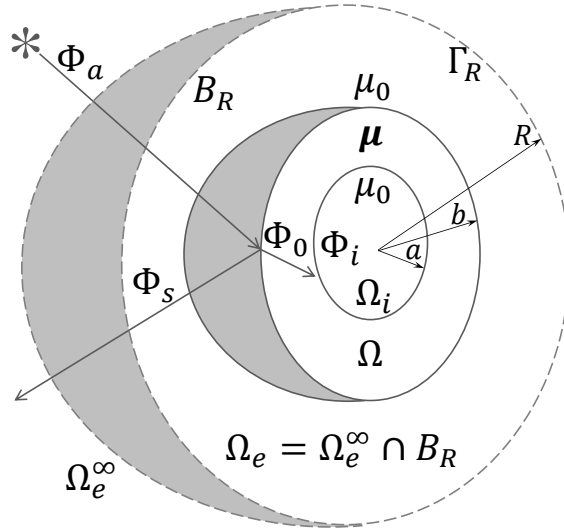


Рисунок 1.3 — Схематическое изображение внешне приложенного магнитного поля и шара B_R , содержащего сферическую магнитную оболочку Ω .

которого зависят от координаты r и характеризуются сингулярным поведением на внутренней границе оболочки, т.е. при $r \rightarrow a$. Недостатком указанного класса решений является практическая невозможность технической реализации отвечающей указанному решению маскировочной оболочки [122].

Второе решение отвечает бислойной оболочке, состоящей из двух слоев: внутреннего сверхпроводящего слоя (Ω_1, μ_1) , где Ω_1 – сферический слой $a < r < b$, $\mu_1 = 0$, и внешнего ферромагнитного слоя (Ω_2, μ_2) , где Ω_2 – сферический слой $b < r < c$, $\mu_2 = (2c^3 + b^3)/2(c^3 - b^3) > 1$. Недостатком этого решения является то, что соответствующая бислойная оболочка обладает идеальным маскировочным эффектом лишь при жестком предположении о постоянстве внешне приложенного поля \mathbf{H}_a во всем пространстве \mathbb{R}^3 (см. детали в [6; 79, гл. 3]).

Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$. При анализе рассматриваемых ниже задач будем использовать трехмерные аналоги введенных выше (в разд. 1.2) функциональных пространств.

Введем следующие основные предположения на входящий в (1.40), (1.41) тензор $\boldsymbol{\mu}$, описывающий магнитные свойства среды, заполняющей Ω , и на сужение Φ^e поля Φ_a на Ω_e :

(i) тензор $\boldsymbol{\mu}$ диагонален в сферических координатах r, θ, φ , а его диагональные компоненты (радиальная, полярная и азимутальная магнитные проницаемости) μ_r, μ_θ и μ_φ не зависят от угла φ и удовлетворяют условиям:

$$\mu_r \in L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega), \mu_\theta \in L_{\mu_\theta^0}^\infty(\Omega), \mu_r^0 = \text{const} > 0, \mu_\theta^0 = \text{const} > 0, \mu_\varphi = \mu_\theta; \quad (1.43)$$

(ii) $\Phi^e \equiv \Phi_a|_{\Omega_e} \in \mathcal{H}(\Omega_e)$.

Приведенные выше предположения (i) и (ii) позволяют существенно упростить исследование сформулированной выше задачи магнитного сопряжения, если записать второе уравнение в (1.40) для Φ_0 в сферических координатах r, θ, φ и отыскивать ее осесимметричное решение, т.е. решение, не зависящее от угла φ (в сферических координатах). При реализации этой идеи будем существенно использовать тот факт, что в сферических координатах вектор $\text{grad } \Phi_0$ и произведение диагонального в сферических координатах тензора $\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$ на $\text{grad } \Phi_0$ выражаются формулами (см., например, [6, с. 115]):

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi_0 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \boldsymbol{\mu} \text{ grad } \Phi_0 &= \mu_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\mu_\theta}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\mu_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Здесь $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ и \mathbf{e}_φ – единичные векторы сферического базиса.

Основную роль ниже будет играть подпространство $\mathcal{H}^1(B_R)$ пространства $H^1(B_R)$, состоящее из функций, не зависящих от угла φ . Поскольку потенциал Φ определяется с точностью до аддитивной постоянной, то условимся ниже не различать функции из $\mathcal{H}^1(B_R)$, отличающиеся друг от друга на аддитивную константу. Для этого достаточно произвести в $\mathcal{H}^1(B_R)$ разбиение на классы смежности, считая, что два элемента Φ_1 и Φ_2 принадлежат одному и тому же классу смежности, если $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$. Норму в $\mathcal{H}^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ введем с учетом формулы для $\text{grad } \Phi$ в (1.44) и независимости функций от угла φ формулой

$$\|\Phi\|_X^2 = \|\nabla \Phi\|_{\Omega_i}^2 + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\|_{\Omega}^2 + \|\nabla \Phi\|_{\Omega_e}^2. \quad (1.45)$$

Можно показать, что так введенное пространство $X \equiv \mathcal{H}^1(B_R) \setminus \mathbb{R}$ является гильбертовым по норме (1.45). Через X^* обозначим двойственное к X пространство.

Начнем наш анализ задачи 2, рассматриваемой во всем пространстве \mathbb{R}^3 , с ее сведения к эквивалентной краевой задаче, рассматриваемой в ограниченной области B_R . С этой целью введем аналогично [3; 49] оператор Дирихле-Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_R)$, ставящий в соответствие каждой функции $h \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial \tilde{\Phi} / \partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{\Phi}$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения $\Delta \Phi = 0$ в $\Omega_e^\infty \setminus B_R$ при краевом условии $\Phi|_{\Gamma_R} = h$,

удовлетворяющее условию (1.42). Отметим, что задача (1.40), (1.41), (1.42), рассматриваемая во всем пространстве \mathbb{R}^3 , эквивалентна краевой задаче (1.40), (1.41), рассматриваемой в шаре B_R при следующем дополнительном условии для поля Φ_s на Γ_R :

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial n} = T\Phi_s \text{ на } \Gamma_R. \quad (1.46)$$

Следующий этап исследования рассматриваемой задачи магнитного сопряжения состоит в том, чтобы вывести ее слабую формулировку. Пусть $S \in X$ – произвольная тестовая функция. Умножим уравнения, входящие в (1.40), рассматриваемые в областях Ω_i , Ω и Ω_e , на S , проинтегрируем по Ω_i , Ω либо Ω_e и применим для каждой области формулу Грина. Складывая полученные тождества и используя вторую формулу в (1.44) и граничные условия в (1.41) и (1.46), приходим к следующему тождеству для тройки $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e)$, где $\Phi_e = \Phi^e + \Phi_s = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s$:

$$a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S) = \langle F^e, S \rangle \quad \forall S \in X. \quad (1.47)$$

Здесь и ниже под μ будем понимать пару (μ_r, μ_θ) , тогда как $a_0(\cdot, \cdot)$, $a(\mu_r, \mu_\theta; \cdot, \cdot)$ и F^e – билинейные и линейная формы на X , определяемые формулами

$$a_0(\Phi, S) = \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla \Phi \cdot \nabla S d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_R} (T\Phi) S d\sigma, \quad (1.48)$$

$$\langle F^e, S \rangle = - \int_{\Gamma_R} T\Phi^e S d\sigma + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial \Phi^e}{\partial n} S d\sigma,$$

$$a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S) = a_1(\mu_r; \Phi, S) + a_2(\mu_\theta; \Phi, S), \quad (1.49)$$

где

$$a_1(\mu_r; \Phi, S) = \int_{\Omega} \mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r} d\mathbf{x}, \quad a_2(\mu_\theta; \Phi, S) = \int_{\Omega} \frac{\mu_\theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} d\mathbf{x}. \quad (1.50)$$

Тождество (1.47) представляет собой слабую формулировку задачи (1.40), (1.41), (1.46), а ее решение $\Phi = (\Phi_i, \Phi_0, \Phi_e) \in X$ будем называть слабым решением задачи 2.

Отметим, что в силу теоремы о следах для любой функции $\Phi \in X$ существует след $\Phi|_{\Gamma_R} \in H^{1/2}(\Gamma_R)$, тогда как для любой функции (внешнего поля) $\Phi^e \in \mathcal{H}(\Omega_e)$ существует нормальный след $\partial \Phi^e / \partial n|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$ и справедливы следующие оценки:

$$\|\Phi\|_{1/2, \Gamma_R} \leq C_R \|\Phi\|_X \quad \forall \Phi \in X, \quad \|\partial \Phi^e / \partial n\|_{-1/2, \Gamma_R} \leq C'_R \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e} \quad \forall \Phi^e \in \mathcal{H}(\Omega_e). \quad (1.51)$$

Здесь C_R и C'_R – константы, зависящие от Ω и R , но не зависящие от $\Phi \in X$ и $\Phi^e \in \mathcal{H}(\Omega_e)$. Используя неравенство Гельдера и формулу (1.45) для нормы $\|\cdot\|_X$, выводим

$$\begin{aligned} |a_1(\mu_r; \Phi, S)| &= \left| \int_{\Omega} \mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r} d\mathbf{x} \right| \leq \|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_X \|S\|_X, \\ |a_2(\mu_\theta; \Phi, S)| &= \left| \int_{\Omega} \frac{\mu_\theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial S}{\partial \theta} d\mathbf{x} \right| \leq \|\mu_\theta\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_X \|S\|_X. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Кроме того, используя (1.45), (1.51), выводим из (1.48), (1.49), (1.50), что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} (T\Phi) S d\sigma \right| &\leq \|T\Phi\|_{-1/2, \Gamma_R} \|S\|_{1/2, \Gamma_R} \leq \\ &\leq \|T\| \|\Phi\|_{1/2, \Gamma_R} \|S\|_{1/2, \Gamma_R} \leq C_T C_R^2 \|\Phi\|_X \|S\|_X, \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\left| \mu_0 \int_{\Omega_i \cup \Omega_e} \nabla \Phi \cdot \nabla S d\mathbf{x} \right| \leq \mu_0 \|\Phi\|_X \|S\|_X, \quad |a_0(\Phi, S)| \leq (\mu_0 + C_T C_R^2) \|\Phi\|_X \|S\|_X, \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} |\langle F^e, S \rangle| &\leq (\|T\| \|\Phi^e\|_{1/2, \Gamma_R} + \|\partial \Phi^e / \partial n\|_{-1/2, \Gamma_R}) \|S\|_{1/2, \Gamma_R} \leq \\ &\leq (C_T C_R + C'_R) C_R \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e} \|S\|_X. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Из оценок (1.52), (1.54), (1.55), определения нормы в пространстве X и (1.49) следует, что формы a_0 , F^e и $a(\mu_r, \mu_\theta; \cdot, \cdot)$, где $\mu_r \in L^\infty(\Omega)$, $\mu_\theta \in L^\infty(\Omega)$, непрерывны на X , причем

$$\|a_0\| \leq C_0, \quad \|F^e\|_{X^*} \leq C_0 \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}, \quad C_0 = \max[\mu_0 + C_T C_R^2, (C_T C_R + C'_R) C_R], \quad (1.56)$$

$$|a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S)| \leq (\|\mu_r\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mu_\theta\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\Phi\|_X \|S\|_X \quad \forall \Phi, S \in X. \quad (1.57)$$

Предположим теперь, более того, что выполняются условия (1.43). Тогда имеем

$$\begin{aligned} a_1(\mu_r; \Phi, \Phi) &\equiv \int_{\Omega} \mu_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} d\mathbf{x} \geq \mu_r^0 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|_{\Omega}^2, \\ a_2(\mu_\theta; \Phi, \Phi) &\equiv \int_{\Omega} \frac{\mu_\theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\mathbf{x} \geq \mu_\theta^0 \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\|_{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Из этих оценок и определения нормы (1.45) в пространстве X вытекает, что

$$a_\mu(\Phi, \Phi) = a_0(\Phi, \Phi) + a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, \Phi) \geq \bar{\mu} \|\Phi\|_X^2 \quad \forall \Phi \in X, \quad \bar{\mu} = \min(\mu_0, \mu_r^0, \mu_\theta^0). \quad (1.58)$$

Отметим, что билинейная форма a_μ , введенная в (1.47), определяет линейный оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$, действующий по формуле

$$\langle A_\mu \Phi, S \rangle = a_\mu(\Phi, S) \equiv a_0(\Phi, S) + a(\mu_r, \mu_\theta; \Phi, S), \quad (1.59)$$

а вариационная задача (1.47) эквивалентна операторному уравнению

$$A_\mu \Phi = F^e. \quad (1.60)$$

Как уже указывалось, билинейная форма a_μ , введенная в (1.47), и линейная форма F^e непрерывны на X , а из (1.58) следует, что a_μ коэрцитивна на X . В таком случае из теоремы Лакса-Мильграма [36, с. 386], [82, с. 6] вытекает, что оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$ – изоморфизм. Обозначив через $A_\mu^{-1} : X^* \rightarrow X$ обратный оператор к A_μ , положим $C_\mu = \|A_\mu^{-1}\|$. Ясно в силу теоремы Лакса-Мильграма, что $C_\mu \leq C_1 = (1/\bar{\mu})$, причем для любого элемента $F^e \in X^*$ задача (1.47) (или, что то же, операторное уравнение (1.60)) имеет единственное решение $\Phi_\mu = A_\mu^{-1}(F^e) \in X$, для которого справедлива оценка $\|\Phi_\mu\|_X \leq C_1 \|F^e\|_{X^*}$. Отсюда и (1.56), в свою очередь, следует, что для любого внешнего поля $\Phi^e \in \mathcal{H}(\Omega_e)$ задача (1.47) имеет единственное решение $\Phi \in X$, для которого справедлива оценка

$$\|\Phi_\mu\|_X \leq C_2 \|\Phi^e\|_{1, \Omega_e}, \quad C_2 = C_0 C_1, \quad C_1 = (1/\bar{\mu}). \quad (1.61)$$

Подчеркнем, что константы C_1 и C_2 в (1.61) зависят в силу (1.58) от констант $\mu_0, \mu_r^0, \mu_\theta^0$, но не зависят от функций μ_r и μ_θ , которые могут пробегать произвольные множества $K_1 \subset L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega)$ и $K_2 \subset L_{\mu_\theta^0}^\infty(\Omega)$. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.2. *Пусть выполняются условия (i), (ii). Пусть $K_1 \subset L_{\mu_r^0}^\infty(\Omega)$ и $K_2 \subset L_{\mu_\theta^0}^\infty(\Omega)$ – произвольные непустые множества. Тогда для любой пары $\mu = (\mu_r, \mu_\theta) \in K_1 \times K_2$:*

1) *оператор $A_\mu : X \rightarrow X^*$, определенный в (1.59), осуществляет изоморфизм, а для обратного оператора $A_\mu^{-1} : X^* \rightarrow X$ справедлива оценка $\|A_\mu^{-1}\| \leq C_1 \equiv (1/\bar{\mu})$, где константа $\bar{\mu}$ определена в (1.58);*

2) *для любого внешнего поля $\Phi^e \in \mathcal{H}(\Omega_e)$ задача (1.47) имеет единственное решение $\Phi_\mu \in X$, для которого справедлива оценка (1.61) с константой C_2 , не зависящей от (μ_r, μ_θ) .*

Доказательство теоремы 1.2 приведено в работе [22], а также существенно используется в следующей серии работ [23; 24; 33; 51; 58; 100; 104].

Следствие 1.2. Приведенные выше результаты остаются справедливыми для решения аналогичной задачи сопряжения для трехмерной модели электростатики [51; 62].

Замечание 1.1. Данная глава написана по материалам работ [22; 42; 56; 103; 114]. Близкие по тематике этой главы вопросы касающиеся акустической, тепловой и электромагнитной маскировки, затронуты в [17; 18; 50; 53; 55; 59].

Глава 2. Исследование двумерных задач магнитной маскировки многослойными оболочками

В этой главе будут исследованы обратные задачи для стационарных уравнений Максвелла, лежащих в основе двумерной магнитостатической модели, с помощью оптимизационного метода в предположении, что исходная оболочка состоит из конечного числа слоев, заполненных однородными изотропными средами. Указанные задачи сводятся к решению соответствующих конечномерных экстремальных задач, в которых постоянные магнитные проницаемости каждого слоя играют роль управляющих параметров. Будет предложен численный алгоритм их решения, основанный на методе роя частиц [108], установлены некоторые свойства оптимальных решений, полученных с использованием этого метода, и приведен анализ результатов вычислительных экспериментов для случая однородного внешне приложенного поля.

2.1 Постановка прямой и обратной задач для двумерной модели магнитостатики

Сформулируем сначала прямую задачу магнитостатики. Будем предполагать, что во всей плоскости \mathbb{R}^2 , заполненной однородной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$, внешние источники магнитного поля сосредоточены вне круга $B_R = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| < R\}$ радиуса $R > b$ (см. рисунок 2.1) и в \mathbb{R}^2 задают постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, направленное вдоль оси x и отвечающее магнитному потенциалу $\Phi_a(\mathbf{x}) = -H_a r \cos \varphi$, где $H_a = |\mathbf{H}_a| = \text{const}$, r, φ – полярные координаты точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим физический сценарий, когда в B_R вносится объект (Ω, μ) , где область Ω имеет в полярных координатах (r, φ) форму кольца $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b – положительные константы, а μ – относительная магнитная проницаемость среды, заполняющей область Ω . Тогда поле Φ_a изменяется и принимает вид $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$, где Φ_s – возмущение (рассеянный отклик) поля Φ_a , вызванное внесением объекта в \mathbb{R}^2 .

Чтобы найти рассеянный отклик Φ_s , нужно сформулировать прямую задачу магнитостатики, отвечающую описанному выше физическому сценарию. Введем два множества (см рисунок 2.1):

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\} \text{ и } \Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$$

и будем считать, что область Ω состоит из конечного числа M элементарных круговых колец

$$\Omega_m = \{R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m, m = \overline{1, M}, R_0 = a, R_M = b, \} \quad (2.1)$$

одинаковой ширины $d = (b - a)/M$. Каждое из них заполнено однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_m, m = \overline{1, M}$.

Подчеркнем, что при использовании слоистой оболочки решение рассматриваемых обратных задач существенно упрощается, поскольку магнитную проницаемость $\mu(\mathbf{x})$, отвечающую слоистой оболочке, следует искать в виде

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \mu_k \chi_k(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Здесь $\chi_m(\mathbf{x})$ – характеристическая функция слоя Ω_m , равная 1 в Ω_m и 0 вне Ω_m , а μ_m – неизвестные положительные проницаемости слоев Ω_m .

Положим $\Omega_{M+1} = \Omega_e^\infty \cap B_R$ и обозначим через Φ_m сужение $\Phi|_{\Omega_m}$ полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ на подобласть $\Omega_m, m = \overline{0, M+1}$. Тогда прямая задача нахождения полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi_s$ сводится к нахождению всех $M+2$ полей Φ_m в областях $\Omega_m, m = \overline{0, M}$ и Φ_s в Ω_e^∞ , путем решения следующей задачи магнитного сопряжения [22; 42]

$$\Delta \Phi_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \operatorname{div}(\mu_m \nabla \Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad \Delta \Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad m = \overline{1, M}, \quad (2.3)$$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \mu_{m+1} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = \overline{0, M}, \quad (2.4)$$

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad \Phi_s(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Так как приведенная выше постановка прямой задачи (2.3) – (2.5) является частным случаем постановки прямой краевой задачи магнитного сопряжения в разд. 1.2, то полученные там результаты о существовании и единственности решения остаются справедливыми и для решения прямой задачи (2.3) – (2.5).

Отметим, что целью этой главы является численный анализ обратных задач для модели (2.3) – (2.5), связанных с проектированием экранирующих и

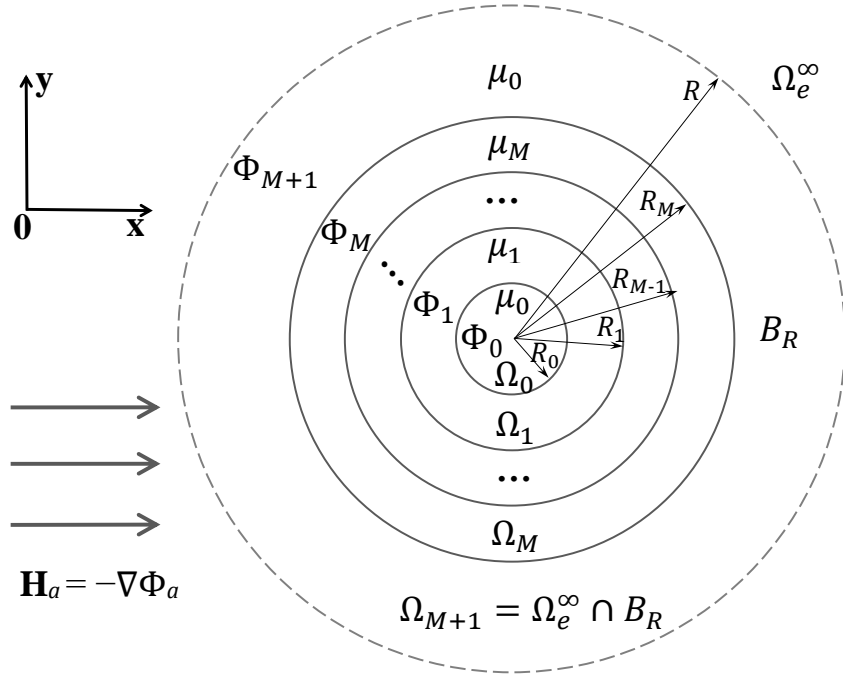


Рисунок 2.1 — Геометрия двумерной слоистой маскировочной оболочки и схематическое распределение магнитного поля

маскирующих оболочек. В этой связи напомним, что общая обратная задача для модели (2.3) – (2.5), называемая задачей полной маскировки, состоит в нахождении магнитной проницаемости μ среды, заполняющей область Ω , исходя из следующих двух независимых условий:

$$\nabla \Phi_0^\mu = 0 \text{ в } \Omega_0 \quad (\text{т.е. } \Phi_0^\mu = \text{const в } \Omega_0), \quad \Phi_{M+1}^\mu = \Phi^e \equiv \Phi_a|_{B_R} \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (2.6)$$

Здесь $\Phi_{M+1}^\mu = \Phi_a|_{\Omega_e} + \Phi_s^\mu|_{\Omega_{M+1}}$, а тройка $(\Phi_0^\mu, \Phi_m^\mu, \Phi_s^\mu)$ является решением задачи (2.3) – (2.5), отвечающим конкретной проницаемости μ в Ω . Второе условие в (2.6) означает, что $\Phi_s^\mu|_{\Omega_{M+1}} = 0$, т.е. что сужение рассеянного искомым оболочкой поля Φ_s на Ω_{M+1} должно быть равно нулю. Оболочку (Ω, μ) , обеспечивающую точное выполнение первого условия в (2.6) (либо обоих условий в (2.6)), будем называть идеальной экранирующей (либо идеальной маскировочной) оболочкой [6]. В частном случае, когда проницаемость μ определяется исключительно из первого (либо второго) условия в (2.6), будем ссылаться на соответствующую обратную задачу как на задачу экранирования (либо задачу внешней маскировки).

Обозначим через $(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M, \Phi_{M+1})$, где $\Phi_m = \Phi|_{\Omega_m}$, $m = 1, 2, \dots, M$, решение задачи (2.3) – (2.5), отвечающее проницаемости (2.2) в Ω и значению μ_0 в Ω_0 и Ω_{M+1} . Простой анализ показывает, что решение

$(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_M, \Phi_{M+1})$ представимо в виде

$$\Phi_0(r, \varphi) = A_0 r \cos \varphi \text{ в } \Omega_0, \quad (2.7)$$

$$\Phi_1(r, \varphi) = (A_1 r + B_1/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_1, \quad (2.8)$$

$$\Phi_2(r, \varphi) = (A_2 r + B_2/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_2, \quad (2.9)$$

...

$$\Phi_M(r, \varphi) = (A_M r + B_M/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_M, \quad (2.10)$$

$$\Phi_{M+1}(r, \varphi) = (-H_a r + B_{M+1}/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (2.11)$$

Здесь константы A_0, A_m, B_m, B_{M+1} , $m = 1, \dots, M$ определяются из условий непрерывности смежных полей Φ_m и Φ_{m+1} на общей границе $r = R_m$, $m = 0, 1, \dots, M$. Указанные условия имеют вид следующей системы $2(M+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_0, A_m, B_m, B_{M+1} , $m = 1, \dots, M$:

$$-R_0^2 A_0 + R_0^2 A_1 + B_1 = 0, \quad (2.12)$$

$$-\mu_0 R_0^2 A_0 + \mu_1 R_0^2 A_1 - \mu_1 B_1 = 0, \quad (2.13)$$

$$R_1^2 A_1 - R_1^2 A_2 + B_1 - B_2 = 0, \quad (2.14)$$

$$\mu_1 R_1^2 A_1 - \mu_2 R_1^2 A_2 - \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = 0, \quad (2.15)$$

...

$$R_m^2 A_m - R_m^2 A_{m+1} + B_m - B_{m+1} = 0, \quad m = \overline{2, M-1}, \quad (2.16)$$

$$\mu_m R_m^2 A_m - \mu_{m+1} R_m^2 A_{m+1} - \mu_m B_m + \mu_{m+1} B_{m+1} = 0, \quad (2.17)$$

$$-R_M^2 A_M - B_M + B_{M+1} = H_a R_M^2, \quad (2.18)$$

$$-\mu_M R_M^2 A_M + \mu_M B_M - \mu_0 B_{M+1} = \mu_0 H_a R_M^2. \quad (2.19)$$

В матричной форме данная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} -R_0^2 & R_0^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mu_0 R_0^2 & \mu_1 R_0^2 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1^2 & 1 & -R_1^2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_1 R_1^2 & -\mu_1 & -\mu_2 R_1^2 & \mu_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_m^2 & 1 & -R_m^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_m R_m^2 & -\mu_m & -\mu_{m+1} R_m^2 & \mu_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -R_M^2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_M R_M^2 & \mu_M & -\mu_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ A_m \\ B_m \\ \vdots \\ A_M \\ B_M \\ B_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ H_a R_M^2 \\ \mu_0 H_a R_M^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить, что матрица системы (2.12) – (2.19) несингулярна, за исключением некоторых особых значений магнитных проницаемостей μ_1, \dots, μ_M . Поэтому систему (2.12) – (2.19) можно решить относительно неизвестных коэффициентов $A_0, A_m, B_m, B_{M+1}, m = 1, \dots, M$. После подстановки найденных коэффициентов в (2.7) – (2.11) находим соответствующие поля Φ_0 в Ω_0 , Φ_m в $\Omega_m, m = 1, 2, \dots, M$ и Φ_{M+1} в Ω_{M+1} , образующие искомое решение задачи (2.3) – (2.5). Таким образом, в этом случае рассматриваемые обратные задачи магнитной маскировки сводятся к поиску таких проницаемостей μ_1, \dots, μ_M слоев $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, что соответствующее им решение $\Phi_0, \Phi_m, \Phi_{M+1}, m = 1, 2, \dots, M$, определяемое формулами (2.7) – (2.11), в точности удовлетворяет условиям (2.6).

2.2 Частный случай двухслойной маскировочной оболочки

В простейшем случае, когда число слоев M равно 2, соответствующее точное решение $(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ определяется следующими формулами:

$$\Phi_0(r, \varphi) = A_0 r \cos \varphi \text{ в } \Omega_0, \quad (2.20)$$

$$\Phi_1(r, \varphi) = (A_1 r + B_1/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_1, \quad (2.21)$$

$$\Phi_2(r, \varphi) = (A_2 r + B_2/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_2, \quad (2.22)$$

$$\Phi_3(r, \varphi) = (-H_a r + B_3/r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_3. \quad (2.23)$$

Здесь неизвестные коэффициенты A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 и B_3 являются решением следующей системы шести линейных алгебраических уравнений:

$$-R_0^2 A_0 + R_0^2 A_1 + B_1 = 0,$$

$$-\mu_0 R_0^2 A_0 + \mu_1 R_0^2 A_1 - \mu_1 B_1 = 0,$$

$$R_1^2 A_1 - R_1^2 A_2 + B_1 - B_2 = 0,$$

$$\mu_1 R_1^2 A_1 - \mu_2 R_1^2 A_2 - \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = 0,$$

$$-R_2^2 A_2 - B_2 + B_3 = H_a R_2^2,$$

$$-\mu_2 R_2^2 A_2 + \mu_2 B_2 - \mu_0 B_3 = \mu_0 H_a R_2^2. \quad (2.24)$$

В матричной форме данная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} -R_0^2 & R_0^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_0 R_0^2 & \mu_1 R_0^2 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1^2 & 1 & -R_1^2 & -1 & 0 \\ 0 & \mu_1 R_1^2 & -\mu_1 & -\mu_2 R_1^2 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2^2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_2 R_2^2 & \mu_2 & -\mu_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_a R_2^2 \\ \mu_0 H_a R_2^2 \end{pmatrix}.$$

Из (2.20) и (2.23) вытекает, что первое (либо второе) условие в (2.6) выполняется тогда и только тогда, когда $A_0 = 0$ (либо $B_3 = 0$). Используя аналитический модуль пакета Wolfram Mathematica, точные выражения для коэффициентов A_0 и B_3 можно записать в виде:

$$A_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Delta_{A_0}}{\Delta} = -\frac{8H_a \mu_0 \mu_1 \mu_2 R_0^2 R_1^2 R_2^2}{\Delta}, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} B_3(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Delta_{B_3}}{\Delta} = & \frac{H_a R_0^2 R_2^2 (-\mu_0 (\mu_1^2 - \mu_2^2) (R_0^2 - R_1^2) (R_1^2 - R_2^2))}{\Delta} + \\ & + \frac{\mu_1 \mu_2 (-\mu_2 (R_0^2 + R_1^2) (R_1^2 - R_2^2) - \mu_1 (R_0^2 - R_1^2) (R_1^2 + R_2^2))}{\Delta} + \\ & + \frac{\mu_0^2 (\mu_1 (R_0^2 + R_1^2) (R_1^2 - R_2^2) + \mu_2 (R_0^2 - R_1^2) (R_1^2 + R_2^2))}{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где определитель Δ системы (2.24) определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta = & R_0^2 (\mu_1 \mu_2 (-\mu_2 (R_0^2 + R_1^2) (R_1^2 - R_2^2) - \mu_1 (R_0^2 - R_1^2) (R_1^2 + R_2^2)) + \\ & + \mu_0^2 (-\mu_1 (R_0^2 + R_1^2) (R_1^2 - R_2^2) - \mu_2 (R_0^2 - R_1^2) (R_1^2 + R_2^2)) + \\ & + \mu_0 (\mu_1^2 (R_0^2 - R_1^2) (R_1^2 - R_2^2) + \mu_2^2 (R_0^2 - R_1^2) (R_1^2 - R_2^2) + 2\mu_1 \mu_2 (R_0^2 + R_1^2) (R_1^2 + R_2^2))) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из (2.25) следует в предположении $\mu_0 > 0$, что $A_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = 0$ (либо $\mu_2 = 0$). Подставляя $\mu_1 = 0$ в (2.26), выводим, что

$$B_3(0, \mu_2) = B_3 = -\frac{H_a R_2^2 (\mu_2 (R_1^2 - R_2^2) + \mu_0 (R_1^2 + R_2^2))}{\mu_2 (R_2^2 - R_1^2) + \mu_0 (R_1^2 + 2R_2^2)}. \quad (2.28)$$

Полагая $B_3 = 0$ в (2.28), получаем линейное уравнение относительно неизвестной проницаемости μ_2 . Его решение, обеспечивающее выполнение условия $B_3 = 0$, имеет вид

$$\mu_2 = \mu_2^0 \equiv \mu_0 \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (2.29)$$

Указанное точное решение обратной задачи полной маскировки, обеспечивающее точное выполнение условий (2.6), относится к классу так называемых сингулярных решений. Такое название связано с отсутствием в природе или инженерной практике материалов с нулевой магнитной проницаемостью $\mu_1 = 0$. Именно по этой причине техническая реализация решения (2.29) не представляется возможной. В виду этого нашей ближайшей целью будет являться разработка эффективного численного алгоритма нахождения приближенных решений задачи маскировки, допускающих простую техническую реализацию. Для реализации этой цели применим оптимизационный метод.

2.3 Применение оптимизационного метода. Формулировка экстремальных задач

В соответствии с оптимизационным методом заменим обратные задачи магнитной маскировки соответствующими экстремальными задачами [44]. Чтобы сформулировать их, введем в рассмотрение M -мерный вектор $\mathbf{m} = (\mu_1, \dots, \mu_M)$, составленный из магнитных проницаемостей отдельных слоев Ω_m , $m = 1, 2, \dots, M$, и введем ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^M$:

$$K = \{\mathbf{m} = (\mu_1, \dots, \mu_M) : 0 < \mu_{min} \leq \mu_m \leq \mu_{max}, \quad m = 1, 2, \dots, M\}, \quad (2.30)$$

на которое будем ссылаться как на множество управлений. Здесь заданные положительные константы μ_{min} и μ_{max} определяют нижнюю и верхнюю границы множества K .

Обозначим через $\Phi[\mathbf{m}] \equiv \Phi[\mu_1, \dots, \mu_M]$ решение задачи (2.3) – (2.5), соответствующее магнитным проницаемостям μ_k в слоях Ω_m , $m = 1, 2, \dots, M$, и проницаемости μ_0 в областях Ω_0 и Ω_{M+1} . Определим два функционала качества

$$J_i(\mathbf{m}) = \frac{\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|\nabla\Phi^e\|_{L^2(\Omega_0)}}, \quad J_e(\mathbf{m}) = \frac{\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}}{\|\Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}}, \quad (2.31)$$

где, в частности,

$$\|\Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2 = \int_{\Omega_{M+1}} |\Phi^e|^2 dx,$$

$$\|\nabla\Phi^e\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi^e|^2 dx,$$

$$\begin{aligned}\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2 &= \int_{\Omega_{M+1}} |\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi^e|^2 d\mathbf{x}, \\ \|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]|^2 d\mathbf{x},\end{aligned}\quad (2.32)$$

и сформулируем следующие экстремальные задачи:

$$J_i(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K, \quad (2.33)$$

$$J(\mathbf{m}) = (1/2)[J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})] \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K. \quad (2.34)$$

Отметим, что экстремальная задача (2.33) соответствует задаче экранирования, тогда как задача (2.34) соответствует задаче полной маскировки.

Можно показать, что интегралы, входящие в (2.32), вычисляются точно по аналитическим формулам. Действительно, используя формулы (2.7), (2.11), выводим в общем случае для M слоев:

$$J_i(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2}{\|\nabla\Phi^e\|_{L^2(\Omega_0)}^2}} = \sqrt{\frac{\pi A_0^2 R_0^2}{\pi H_a^2 R_0^2}} = \frac{|A_0|}{|H_a|}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}J_e(\mathbf{m}) &= \sqrt{\frac{\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2}{\|\Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2}} = \sqrt{\frac{(B_{M+1})^2 \pi \ln(R_{M+1}/R_M)}{\frac{\pi}{4} H_a^2 (R_{M+1}^4 - R_M^4)}} = \\ &= \frac{2|B_{M+1}|}{|H_a|} \sqrt{\frac{\ln(R_{M+1}/R_M)}{R_{M+1}^4 - R_M^4}},\end{aligned}\quad (2.36)$$

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}[J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})] = \frac{|A_0|}{2|H_a|} + \frac{|B_{M+1}|}{|H_a|} \sqrt{\frac{\ln(R_{M+1}/R_M)}{R_{M+1}^4 - R_M^4}}. \quad (2.37)$$

Здесь

$$R_0 = a, \quad R_M = b, \quad R_{M+1} = R, \quad H_a = |\mathbf{H}_a|. \quad (2.38)$$

В более подробной форме имеем, в частности,:

$$\begin{aligned}\|\nabla\Phi^e\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} |\nabla\Phi^e|^2 dx = \\ &= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} (-H_a \cos \varphi)^2 + \left(\frac{1}{r} H_a r \sin \varphi\right)^2 r dr d\varphi = \\ &= H_a^2 \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) r dr d\varphi = H_a^2 \pi R_0^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]|^2 dx = \\
&= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} (A_0 \cos \varphi)^2 + \left(\frac{1}{r}A_0 r \sin \varphi\right)^2 r dr d\varphi = \\
&= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} A_0^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) r dr d\varphi = \pi A_0^2 R_0^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2 &= \int_{\Omega_{M+1}} (\Phi^e)^2 dx = \\
&= H_a^2 \int_{R_M}^{R_{M+1}} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi = H_a^2 \int_{R_M}^{R_{M+1}} r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\
&= \left[\frac{H_a^2}{4} r^4 \right]_{R_M}^{R_{M+1}} \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4} H_a^2 (R_{M+1}^4 - R_M^4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi^e\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2 &= \int_{\Omega_{M+1}} |\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi^e|^2 dx = \\
&= \int_{R_M}^{R_{M+1}} \int_0^{2\pi} \left[\left(-H_a r + \frac{B_{M+1}}{r} \right) \cos \varphi + H_a r \cos \varphi \right]^2 r dr d\varphi = \\
&= (B_{M+1})^2 \int_{R_M}^{R_{M+1}} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = (B_{M+1})^2 \pi \ln \left(\frac{R_{M+1}}{R_M} \right).
\end{aligned}$$

Из вида функционалов (2.31) и (2.32) следует, что значение $J_i(\mathbf{m})$ (либо $J_e(\mathbf{m})$) для каждого вектора $\mathbf{m} \in K$ описывает среднеквадратичную ошибку (на функции (2.2)) выполнения первого (либо второго) условия в (2.6), в то время как $J(\mathbf{m})$ описывает (взвешенную) среднеквадратичную ошибку выполнения обоих условий в (2.6) (на функции (2.2)). Основываясь на этих фактах, несложно показать, рассуждая, как в [61], что значение $J(\mathbf{m})$ связано в физическом плане с маскировочной эффективностью проектируемой оболочки (Ω, \mathbf{m}) , а именно: чем меньше значение $J(\mathbf{m})$, тем выше маскировочная эффективность оболочки (Ω, \mathbf{m}) , и наоборот. Отсюда, в частности, следует что экстремальная задача (2.34) направлена на поиск вектора $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt}, \dots, \mu_M^{opt})$, для которого функционал J принимает минимальное значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ на множестве K , и, таким образом, соответствующая оболочка $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$ обладает наивысшей на множестве K маскировочной эффективностью.

Так как множество K является замкнутым и ограниченным в пространстве \mathbb{R}^M , а функции M переменных $J_1(\mathbf{m})$ и $J_2(\mathbf{m})$ непрерывны на K , то

решение каждой из задач в (2.33), (2.34) существует. Остается найти это решение, используя тот или иной алгоритм.

2.4 Численный алгоритм на основе метода роя частиц

Для численного решения задач (2.33), (2.34) применим численный алгоритм, основанный на методе роя частиц (МРЧ) [92; 108], используя схему, предложенную в заметке [12].

Метод роя частиц моделирует перемещение частиц в многомерном пространстве решений. Изменение положения каждой частицы определяется правилом – стремление живых существ конкурировать между собой в борьбе за ресурсы, а также коррелирует с поведением и опытом соседей. Каждая частица роя стремится занять оптимальный участок пространства решений, но при этом все они могут улучшить собственное положение за счет превосходства достижений соседних частиц роя. При компьютерном моделировании частицам присваивают начальные значения положения в пространстве и начальные значения векторов скорости. Для каждого положения частицы вычисляется значение целевой функции, в соответствии с которым частица меняет свое положение и скорость в пространстве поиска ресурсов по определенным правилам.

Напомним, что согласно методу роя частиц искомые параметры, определяющие значение функционала J , представляются в виде координат радиус-вектора $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{M-1}, \mu_M)$ некоторой абстрактной частицы. Роем частиц называют конечный набор частиц $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_N$. Метод роя частиц минимизации функционала качества $J(\mathbf{m})$ состоит в том, чтобы, задав начальное положение \mathbf{m}_j^0 всех частиц μ_j , $j = 1, 2, \dots, N$, выбранного роя, организовать итерационную процедуру перемещения всех частиц так, чтобы через конечное число шагов частицы оказались в окрестности некоторой точки \mathbf{m}_* . При этом на каждой итерации определяются вектор смещения \mathbf{v}_j и персональное наилучшее положение \mathbf{p}_j j -ой частицы, $j = 1, \dots, N$, а также глобальное наилучшее положение \mathbf{p}_g . Они отвечают минимальным значениям функционала для j -ой частицы и для всего роя за все предыдущие итерации. По завершении итерационного процесса точка $\mathbf{m}_* = \mathbf{p}_g$ выбирается в качестве приближенного решения задачи минимизации.

Исходя из вышесказанного, алгоритм поиска вектора \mathbf{m} , решающего задачу минимизации функционала J , можно записать в виде следующих шагов:

Шаг 0. Задать значения параметров алгоритма и начальные положения \mathbf{m}_j^0 , $j = 1, \dots, N$ всех частиц. Положить $\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}_j^0 = \mathbf{m}_j^0$. Вычислить значения $J(\mathbf{m}_j^0)$ функционала J для всех частиц. Найти их минимум и определить глобальное наилучшее положение \mathbf{p}_g , отвечающее минимуму. Положить $i = 0$.

Шаг 1. Для каждой частицы \mathbf{m}_j^i , $j = 1, \dots, N$ вычислить новое значение вектора смещения \mathbf{v}_j^{i+1} и новое положение \mathbf{m}_j^{i+1} по формулам

$$\mathbf{v}_j^{i+1} = w\mathbf{v}_j^i + c_1d_1(\mathbf{p}_j^i - \mathbf{m}_j^i) + c_2d_2(\mathbf{p}_g - \mathbf{m}_j^i), \quad \mathbf{m}_j^{i+1} = \mathbf{m}_j^i + \mathbf{v}_j^{i+1}. \quad (2.39)$$

Вычислить значение $J(\mathbf{m}_j^{i+1})$ функционала J для нового положения \mathbf{m}_j^{i+1} . Сравнить его с текущим минимальным значением и при необходимости обновить персональное и глобальное наилучшие положения \mathbf{p}_j^{i+1} и \mathbf{p}_g .

Шаг 2. Если условие выхода из цикла не выполняется, то положить $i := i + 1$ и перейти на шаг 1.

Условие выхода из цикла может определяться достижением достаточно малого значения функционала J либо значением максимального числа итераций L . Нижний индекс $j \in \{1, \dots, N\}$ в (2.39) обозначает номер частицы, а верхний индекс $i \in \{0, \dots, L\}$ – номер итерации. Числа w , c_1 и c_2 являются постоянными параметрами алгоритма. Коэффициенты d_1 и d_2 являются случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $(0,1)$. Значения параметров w , c_1 , c_2 , N и L существенно влияют на сходимость данного алгоритма. С рекомендациями по их выбору можно ознакомиться в работах [72; 112].

2.5 Анализ результатов вычислительных экспериментов

Отметим прежде всего, что наиболее затратной частью описанного выше алгоритма является вычисление значений $J_i(\mathbf{m}_j^i)$ и $J(\mathbf{m}_j^i)$ минимизируемых функционалов $J_i(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$ для конкретного положения \mathbf{m}_j^i частицы при разных значениях i и j . Эта процедура состоит из двух этапов. Сначала находим решение системы (2.12) – (2.19) для конкретного вектора \mathbf{m}_j^i с помощью пакета прикладных программ Matlab R2017a (лицензия ДВФУ) и, подставив найденные значения A_0 и B_{M+1} в формулы (2.7), (2.11) для Φ_0 и Φ_{M+1} , находим поля

$\Phi_0[\mathbf{m}_i^j]$ и $\Phi_{M+1}[\mathbf{m}_i^j]$, отвечающие конкретному вектору \mathbf{m}_i^j . Далее подставляем найденные выражения $\Phi_0[\mathbf{m}_i^j]$ и $\Phi_{M+1}[\mathbf{m}_i^j]$ в (2.31) и вычисляем точно соответствующие интегралы, определяющие нормы, входящие в (2.31). Ввиду плохой обусловленности системы (2.12) – (2.19) задание ее коэффициентов, нахождение решения и все другие расчеты производились с достаточно высокой точностью, обеспечиваемой правилами пакета Matlab R2017a.

Начнем наш анализ с обсуждения результатов решения задач (2.33) и (2.34) для простейшего случая двухслойной оболочки ($M = 2$). Численное моделирование проводилось для следующих значений a, b, R и μ_0 :

$$a = \{0.01, 0.03, 0.04\} \text{ м}, \quad b = 0.05 \text{ м}, \quad R = \{0.1, 0.7\} \text{ м}, \quad \mu_0 = 1. \quad (2.40)$$

Внешне приложенное магнитное поле \mathbf{H}_a имеет вид $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, $\Phi_a = -H_a r \cos \varphi$, $H_a = |\mathbf{H}_a|$.

Первый численный эксперимент (тест) служит для оценки точности и эффективности разработанного алгоритма. Он относится к точному решению задачи маскировки (2.34) для случая двухслойной изотропной оболочки ($M = 2$) и численному решению двухпараметрической экстремальной задачи (2.34) с помощью МРЧ для фиксированной верхней границы множества управлений $\mu_{max} = 10$ и убывающей последовательности $\mu_{min} = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 10}$ в качестве нижней границы, и сравнении полученных результатов с точным решением. Полученные результаты решения задачи (2.34) в виде оптимальных проницаемостей μ_1^{opt}, μ_2^{opt} и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала $J(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$, представлены вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ и $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ (для сравнения) в таблицах ниже для значений μ_1^n , изменяющихся от 10^{-1} до 10^{-10} .

Таблица 2.1 отвечает решению задачи полной маскировки с помощью метода роя частиц при $M = 2$ для случая $R_0 = 0.01$ м, $R_M = 0.05$ м, $\mu_{max} = 10$ и $\mu_{min}^n = 10^{-n}$, $n = 1, 2, \dots, 10$. Напомним, что точное решение задачи полной маскировки в определяется формулой (2.29). Учитывая, с учетом (2.29) и (2.40), что $R_0 = 0.01$ м, $R_1 = (b + a)/2 = 0.03$ м, $R_2 = b = 0.05$ м, имеем в силу (2.40), что

$$\mu_2^0 = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{0.0025 + 0.0009}{0.0025 - 0.0009} = \frac{0.0034}{0.0016} = 2.125.$$

(Последнее значение записано абсолютно точно).

Анализ таблицы 2.1 показывает, что с уменьшением нижней границы μ_{min} множества K от 10^{-1} до 10^{-10} , чему соответствует увеличение так называемого контраста, определяемого формулой μ_{max}/μ_{min} , от 100 до 10^{11} ,

Таблица 2.1 — Задача полной маскировки $M = 2$. Поиск всех управлений с помощью МРЧ. $\mu_0 = 1$, $\mu_{min}^n = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 10}$, $\mu_{max} = 10$, $R_0 = 0.01$ м, $R_M = 0.05$ м

μ_{min}	μ_{max}	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
10^{-1}	10	10^{-1}	1.9321083190	$1.43 \cdot 10^{-1}$	$2.86 \cdot 10^{-1}$	0.0
10^{-2}	10	10^{-2}	<u>2.1044688976</u>	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$3.26 \cdot 10^{-2}$	0.0
10^{-3}	10	10^{-3}	<u>2.1229334871</u>	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$3.30 \cdot 10^{-3}$	0.0
10^{-4}	10	10^{-4}	<u>2.1247932136</u>	$1.65 \cdot 10^{-4}$	$3.31 \cdot 10^{-4}$	0.0
10^{-5}	10	10^{-5}	<u>2.1249793200</u>	$1.65 \cdot 10^{-5}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$	0.0
10^{-6}	10	10^{-6}	<u>2.1249979320</u>	$1.65 \cdot 10^{-6}$	$3.31 \cdot 10^{-6}$	0.0
10^{-7}	10	10^{-7}	<u>2.1249997932</u>	$1.65 \cdot 10^{-7}$	$3.31 \cdot 10^{-7}$	0.0
10^{-8}	10	10^{-8}	<u>2.1249999793</u>	$1.65 \cdot 10^{-8}$	$3.31 \cdot 10^{-8}$	0.0
10^{-9}	10	10^{-9}	<u>2.1249999973</u>	$1.65 \cdot 10^{-9}$	$3.31 \cdot 10^{-9}$	0.0
10^{-10}	10	10^{-10}	<u>2.1249999997</u>	$1.65 \cdot 10^{-10}$	$3.31 \cdot 10^{-10}$	0.0

оптимальное решение $(\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$ задачи полной маскировки (2.29), найденное с помощью МРЧ, при стремлении μ_{min} к нулю приближается к точному решению $(0, \mu_2^0) = 2.125$ задачи полной маскировки. При этом значение $J(\mathbf{m}^{opt})$, где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$, изменяется от $1.43 \cdot 10^{-1}$ при $\mu_{min} = 10^{-1}$ до значения $1.65 \cdot 10^{-10}$ при $\mu_{min} = 10^{-10}$, отвечающего очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$. Указанные факты подтверждают высокую точность используемого нами оптимизационного метода для решения обратной задачи полной маскировки. В свою очередь, введение множества K формулой (2.30) можно рассматривать как своеобразную физическую регуляризацию рассматриваемой обратной задачи, позволяющую получить ее приближенное “регулярное” решение.

Таблица 2.2 отвечает решению задачи полной маскировки с помощью метода роя частиц при $M = 2$ для случая $R_0 = 0.03$ м, $R_M = 0.05$ м, $\mu_{max} = 10$ и $\mu_{min}^n = 10^{-n}$, $n = 1, 2, \dots, 10$. Точное решение задачи полной маскировки, определяемое формулой (2.29), при $R_0 = 0.03$ м, $R_1 = (b + a)/2 = 0.04$ м, $R_2 = b = 0.05$ м имеет вид

$$\mu_2^0 = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{0.0025 + 0.0016}{0.0025 - 0.0016} = \frac{0.0041}{0.0009} = 4.5555555556.$$

(Последнее значение записано с десятью верными цифрами после запятой).

Анализ таблицы 2.2 показывает, что с уменьшением нижней границы μ_{min} множества K от 10^{-1} до 10^{-10} оптимальное решение $(\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$ задачи полной маскировки (2.29) при стремлении μ_{min} к нулю приближается к точному решению $(0, \mu_2^0) = 4.55555556$ задачи полной маскировки. При этом значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ изменяется от $2.02 \cdot 10^{-1}$ при $\mu_{min} = 10^{-1}$ до значения $2.79 \cdot 10^{-10}$ при $\mu_{min} = 10^{-10}$, отвечающего очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Таблица 2.2 — Задача полной маскировки $M = 2$. Поиск всех управлений с помощью МРЧ. $\mu_0 = 1$, $\mu_{min}^n = 10^{-n}$, $n = \overline{1,10}$, $\mu_{max} = 10$, $R_0 = 0.03$ м, $R_M = 0.05$ м

μ_{min}	μ_{max}	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
10^{-1}	10	10^{-1}	3.4026622062	$2.02 \cdot 10^{-1}$	$4.04 \cdot 10^{-1}$	0.0
10^{-2}	10	10^{-2}	<u>4.4058760391</u>	$2.69 \cdot 10^{-2}$	$5.37 \cdot 10^{-2}$	0.0
10^{-3}	10	10^{-3}	<u>4.5401231317</u>	$2.78 \cdot 10^{-3}$	$5.55 \cdot 10^{-3}$	0.0
10^{-4}	10	10^{-4}	<u>4.5540075048</u>	$2.79 \cdot 10^{-4}$	$5.57 \cdot 10^{-4}$	0.0
10^{-5}	10	10^{-5}	<u>4.5554007022</u>	$2.79 \cdot 10^{-5}$	$5.58 \cdot 10^{-5}$	0.0
10^{-6}	10	10^{-6}	<u>4.5555400697</u>	$2.79 \cdot 10^{-6}$	$5.58 \cdot 10^{-6}$	0.0
10^{-7}	10	10^{-7}	<u>4.5555540070</u>	$2.79 \cdot 10^{-7}$	$5.58 \cdot 10^{-7}$	0.0
10^{-8}	10	10^{-8}	<u>4.5555554007</u>	$2.79 \cdot 10^{-8}$	$5.58 \cdot 10^{-8}$	0.0
10^{-9}	10	10^{-9}	<u>4.5555555401</u>	$2.79 \cdot 10^{-9}$	$5.58 \cdot 10^{-9}$	0.0
10^{-10}	10	10^{-10}	<u>4.5555555540</u>	$2.79 \cdot 10^{-10}$	$5.58 \cdot 10^{-10}$	0.0

Таблица 2.3 отвечает решению задачи полной маскировки с помощью метода роя частиц при $M = 2$ для случая $R_0 = 0.04$ м, $R_M = 0.05$ м, $\mu_{max} = 10$ и $\mu_{min}^n = 10^{-n}$, $n = 1, 2, \dots, 10$. Точное решение задачи полной маскировки, определяемое формулой (2.29), при $R_0 = 0.04$ м, $R_1 = (b + a)/2 = 0.045$ м, $R_2 = b = 0.05$ м имеет вид

$$\mu_2^0 = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{0.0025 + 0.002025}{0.0025 - 0.002025} = \frac{0.004525}{0.000475} = 9.5263157894.$$

(Последнее значение записано с десятью верными цифрами после запятой).

Анализ таблицы 2.3 показывает, что с уменьшением нижней границы μ_{min} множества K от 10^{-1} до 10^{-10} оптимальное решение $(\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$ задачи полной маскировки (2.29) при стремлении μ_{min} к нулю приближается к точному решению $(0, \mu_2^0) = 9.526315789$ задачи полной маскировки. При этом значение

$J(\mathbf{m}^{opt})$ изменяется от $2.04 \cdot 10^{-1}$ при $\mu_{min} = 10^{-1}$ до значения $5.26 \cdot 10^{-10}$ при $\mu_{min} = 10^{-10}$, отвечающего очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Таблица 2.3 — Задача полной маскировки $M = 2$. Поиск всех управлений с помощью МРЧ. $\mu_0 = 1$, $\mu_{min}^n = 10^{-n}$, $n = \overline{1,10}$, $\mu_{max} = 10$, $R_0 = 0.04$ м, $R_M = 0.05$ м

μ_{min}	μ_{max}	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
10^{-1}	10	10^{-1}	10	$2.69 \cdot 10^{-1}$	$4.51 \cdot 10^{-1}$	$8.71 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	10	10^{-2}	8.7857131627	$4.85 \cdot 10^{-2}$	$9.69 \cdot 10^{-2}$	0.0
10^{-3}	10	10^{-3}	<u>9.4466350338</u>	$5.22 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	0.0
10^{-4}	10	10^{-4}	<u>9.5182867673</u>	$5.26 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	0.0
10^{-5}	10	10^{-5}	<u>9.5255122726</u>	$5.26 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$	0.0
10^{-6}	10	10^{-6}	<u>9.5262354316</u>	$5.26 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-5}$	0.0
10^{-7}	10	10^{-7}	<u>9.5263077536</u>	$5.26 \cdot 10^{-7}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$	0.0
10^{-8}	10	10^{-8}	<u>9.5263149859</u>	$5.26 \cdot 10^{-8}$	$1.05 \cdot 10^{-7}$	0.0
10^{-9}	10	10^{-9}	<u>9.5263157091</u>	$5.26 \cdot 10^{-9}$	$1.05 \cdot 10^{-8}$	0.0
10^{-10}	10	10^{-10}	<u>9.5263157814</u>	$5.26 \cdot 10^{-10}$	$1.05 \cdot 10^{-10}$	0.0

Из анализа таблиц 2.1, 2.2, 2.3 следует, что построенное оптимальное решение \mathbf{m}^{opt} задачи полной маскировки является одновременно и точным решением задачи внешней маскировки. Это вытекает из соотношений $J_e(\mathbf{m}^{opt}) = 0$, приведенных в последнем столбце каждой из таблиц 2.1, 2.2, 2.3.

Отметим еще одну особенность приведенных выше таблиц. Она состоит в том, что уменьшение ширины оболочки, а именно увеличение R_0 от 0.01 м до 0.04 м, приводит к уменьшению маскировочной эффективности проектируемой бислойной оболочки в таблицах 2.1, 2.2, 2.3. Например, при $R_0 = 0.01$ м значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ равно $1.65 \cdot 10^{-10}$ при $\mu_{min} = 10^{-10}$, тогда как при $R_0 = 0.04$ м значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ равно $5.26 \cdot 10^{-10}$ при $\mu_{min} = 10^{-10}$. Хотя уменьшение эффективности несущественное, все же стоит учитывать этот факт при выборе размерных значений проектируемой бислойной оболочки.

Из приведенных результатов следует, что высокая эффективность бислойной оболочки достигается за счет выбора очень малого значения проницаемости первого слоя μ_1^{opt} , правильного выбора множества K и оптимально подобранных значений a и b . Однако техническая реализация такого решения является

крайне затруднительной, а фактически невозможной из-за отсутствия материалов, обладающих очень малой магнитной проницаемостью. Для того, чтобы избавиться от этого недостатка, зафиксируем в следующих тестах μ_{min} , выбрав его равным 0.0045, что соответствует известным разработанным метаматериалам [80; 89], и поставим своей целью получить оптимальные решения, обладающие высокой маскировочной эффективностью, за счет увеличения μ_{max} и числа слоев M . Отдельно рассмотрим две группы тестов, отвечающие решению задач (2.33) и (2.34), соответственно.

Наш оптимизационный анализ с использованием МРЧ для задачи экранирования (2.33) позволил установить очень интересный факт, касающийся оптимальных решений. Он состоит в том, что оптимальные значения μ_k^{opt} всех параметров μ_k с нечетными индексами $k = 3, 5, \dots, M - 1$ совпадают с нижней границей μ_{min} множества управлений K , тогда как оптимальные значения $\mu_2^{opt}, \dots, \mu_M^{opt}$ остальных параметров (с четными индексами) совпадают с верхней границей μ_{max} , т.е. выполняются соотношения:

$$\mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_M^{opt} = \mu_{max}. \quad (2.41)$$

Отсюда следует, в частности, что для полученного оптимального решения $\mathbf{m}^{opt} \equiv (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt}, \dots, \mu_M^{opt})$ справедлив аналог так называемого свойства bang-bang (или принципа релейности), согласно которому каждая компонента μ_k^{opt} оптимального решения принимает одно из двух значений μ_{min}, μ_{max} , являющихся границами множества K [70]. Более того, чередование согласно (2.41) значений μ_{min}, μ_{max} в структуре оптимального решения \mathbf{m}^{opt} говорит о том, что построенное нами оптимальное решение совпадает с решением $\mathbf{m}^{alt} \equiv (\mu_{min}, \mu_{max}, \dots, \mu_{min}, \mu_{max})$, отвечающим так называемой схеме чередующегося дизайна 1-го типа (см. подробнее о этом в [61]).

Приведем теперь конкретные результаты решения задачи экранирования для двух тестов. Первый тест отвечает паре $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.0045, 1)$ с низким контрастом $\mu_{max}/\mu_{min} \approx 222$. Напомним, что значение $\mu_{max} = 1$ описывает с высокой точностью магнитную проницаемость воздуха, дерева, алюминия и многих других природных материалов. Результаты решения задачи (2.33) в виде оптимальных значений μ_1^{opt}, μ_M^{opt} магнитных проницаемостей первого и последнего слоев, соответственно, и оптимальных значений $J_i(\mathbf{m}^{opt})$, где $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$, представлены вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ и $J(\mathbf{m}^{opt})$ (для сравнения) в таблице 2.4 для четных значений M , изменяющихся от 2 до

16. Остальные значения управлений μ_k^{opt} , $k = 2, 3, \dots, M - 1$ определяются из соотношений (2.41). Из таблицы 2.4 видно, в частности, что для любого M выполняются равенства $\mu_1^{opt} = \mu_{min}$ и $\mu_M^{opt} = \mu_{max}$, как это вытекает из (2.41), и что значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ уменьшаются от $7.96 \cdot 10^{-2}$ до $5.68 \cdot 10^{-2}$ при увеличении M от 2 до 16.

Таблица 2.4 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 1$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} \approx 222$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.0045	1.0	$7.96 \cdot 10^{-2}$	$3.23 \cdot 10^{-1}$	$2.02 \cdot 10^{-1}$
4	0.0045	1.0	$6.18 \cdot 10^{-2}$	$3.51 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-1}$
6	0.0045	1.0	$5.86 \cdot 10^{-2}$	$3.59 \cdot 10^{-1}$	$2.09 \cdot 10^{-1}$
8	0.0045	1.0	$5.76 \cdot 10^{-2}$	$3.23 \cdot 10^{-1}$	$2.10 \cdot 10^{-1}$
10	0.0045	1.0	$5.72 \cdot 10^{-2}$	$3.65 \cdot 10^{-1}$	$2.11 \cdot 10^{-1}$
12	0.0045	1.0	$5.70 \cdot 10^{-2}$	$3.66 \cdot 10^{-1}$	$2.12 \cdot 10^{-1}$
14	0.0045	1.0	$5.69 \cdot 10^{-2}$	$3.67 \cdot 10^{-1}$	$2.12 \cdot 10^{-1}$
16	0.0045	1.0	$5.68 \cdot 10^{-2}$	$3.68 \cdot 10^{-1}$	$2.12 \cdot 10^{-1}$

Подчеркнем, что значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ в таблице 2.4 для всех M отвечают низкой экранирующей эффективности. Это можно объяснить низким значением контраста $\mu_{max}/\mu_{min} = 222$. Для того, чтобы повысить экранирующую эффективность проектируемой оболочки, следует увеличить контраст пары (μ_{min}, μ_{max}) . В этом можно убедиться из анализа таблицы 2.5, являющейся аналогом таблицы 2.4 для пары $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.0045, 40)$ с контрастом $\mu_{max}/\mu_{min} \approx 8889$. Отметим, что значение $\mu_{max} = 40$ описывает магнитную проницаемость закаленной нержавеющей стали. Видно, что значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ уменьшаются от $1.74 \cdot 10^{-2}$ до $5.83 \cdot 10^{-5}$ при увеличении M от 2 до 16. Последнее значение $J_i(\mathbf{m}^{opt}) = 5.83 \cdot 10^{-5}$ соответствует достаточно высокой экранирующей эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$. В то же время значения $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ и $J(\mathbf{m}^{opt})$, приведенные в двух последних столбцах таблицы 2.5, достаточно велики, поскольку мы минимизируем именно функционал $J_i(\mathbf{m})$. Полученные результаты подтверждают высокую эффективность экранирующих магнитных устройств, полученных с помощью оптимизационного метода в случае оболочек с большим контрастом даже в случае небольшого числа однородных изотропных слоев.

Таблица 2.5 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 8889$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.0045	40.0	$1.74 \cdot 10^{-2}$	$2.66 \cdot 10^{-1}$	$1.42 \cdot 10^{-1}$
4	0.0045	40.0	$1.88 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-1}$	$7.86 \cdot 10^{-2}$
6	0.0045	40.0	$5.06 \cdot 10^{-4}$	$8.24 \cdot 10^{-2}$	$4.14 \cdot 10^{-2}$
8	0.0045	40.0	$2.22 \cdot 10^{-4}$	$3.26 \cdot 10^{-2}$	$1.64 \cdot 10^{-2}$
10	0.0045	40.0	$1.30 \cdot 10^{-4}$	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$1.40 \cdot 10^{-3}$
12	0.0045	40.0	$9.02 \cdot 10^{-5}$	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$1.43 \cdot 10^{-2}$
14	0.0045	40.0	$7.00 \cdot 10^{-5}$	$4.81 \cdot 10^{-2}$	$2.41 \cdot 10^{-2}$
16	0.0045	40.0	$5.83 \cdot 10^{-5}$	$6.32 \cdot 10^{-2}$	$3.16 \cdot 10^{-2}$

Обратимся теперь к задаче полной маскировки (2.34). Отметим, что для задачи (2.34) наблюдается несколько отличий в поведении оптимальных решений по сравнению с задачей (2.33). Основное отличие состоит в том, что соотношения (2.41) для оптимальных проницаемостей, отвечающие схеме чередующегося дизайна 1-го типа, выполняются для всех управлений μ_k^{opt} , кроме последнего μ_M^{opt} , которое принимает некоторое промежуточное значение между μ_{min} и μ_{max} . Другими словами, для задачи (2.34) вместо (2.41) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mu_1^{opt} &= \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}, \\ \mu_2^{opt} &= \mu_4^{opt} = \dots = \mu_{M-2}^{opt} = \mu_{max}, \quad \mu_{min} \leq \mu_M^{opt} \leq \mu_{max}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Еще одно отличие состоит в том, что для некоторых тестов вместо (2.42) для оптимальных значений μ_k^{opt} выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mu_1^{opt} &= \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{max}, \\ \mu_2^{opt} &= \mu_4^{opt} = \dots = \mu_{M-2}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_{min} \leq \mu_M^{opt} \leq \mu_{max}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

отвечающие с точностью до последнего управления схеме чередующегося дизайна 2-го типа.

Приведем теперь результаты решения задачи маскировки для двух конкретных тестов. Первый тест отвечает второй выбранной ранее паре $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.0045, 40)$. Соответствующие результаты решения задачи (2.34) в виде управлений μ_1^{opt} , μ_M^{opt} и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала $J(\mathbf{m})$ представлены вместе со значениями $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ и $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ (для сравнения)

в таблице 2.6. Остальные значения $\mu_2^{opt}, \dots, \mu_{M-1}^{opt}$ определяются из соотношений (2.42), отвечающих схеме чередующегося дизайна 1-го типа при $M = 2, 4, 6, 8$, и из соотношений (2.43), отвечающих схеме чередующегося дизайна 2-го типа при $M = 10, 12, 14, 16$. Из таблице 2.6 видно, в частности, что для значения контраста $\mu_{max}/\mu_{min} \approx 8889$ значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ убывает от $2.28 \cdot 10^{-2}$ до $5.84 \cdot 10^{-5}$, когда M изменяется от 2 до 16. Последнее значение $J(\mathbf{m}^{opt}) = 5.84 \cdot 10^{-5}$ соответствует достаточно высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Таблица 2.6 — Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} \approx 8889$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.0045	9.18	$2.28 \cdot 10^{-2}$	$4.56 \cdot 10^{-2}$	0.0
4	0.0045	17.95	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$2.94 \cdot 10^{-3}$	0.0
6	0.0045	26.01	$3.13 \cdot 10^{-4}$	$6.25 \cdot 10^{-4}$	0.0
8	0.0045	33.52	$1.20 \cdot 10^{-4}$	$2.40 \cdot 10^{-4}$	0.0
10	40.0	0.96	$2.17 \cdot 10^{-4}$	$4.35 \cdot 10^{-4}$	0.0
12	40.0	6.98	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$2.45 \cdot 10^{-4}$	0.0
14	40.0	13.58	$8.02 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-4}$	0.0
16	40.0	20.04	$5.84 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$	0.0

Достигнутую эффективность можно сделать еще выше, если увеличить контраст μ_{max}/μ_{min} за счет увеличения μ_{max} . В этом можно убедиться из таблицы 2.7, которая является аналогом таблицы 2.6 для случая $\mu_{max} = 70$, отвечающего магнитной проницаемости кобальта. Видно, что указанное изменение контраста до 15555 привело к изменению $J(\mathbf{m}^{opt})$ от $2.28 \cdot 10^{-2}$ при $M = 2$ до значения $2.44 \cdot 10^{-6}$ при $M = 16$, которое соответствует достаточно высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$ при $M = 16$. Отметим еще одну особенность последних двух тестов. Она состоит в том, что построенное оптимальное решение \mathbf{m}^{opt} задачи полной маскировки является одновременно точным решением задачи внешней маскировки. Это вытекает из соотношений $J_e(\mathbf{m}^{opt}) = 0$, приведенных в последнем столбце каждой из таблиц 2.6 и 2.7.

Очень интересным является сравнение таблиц 2.5 и 2.6, отвечающих одной и той же паре $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$. Оно показывает, что хотя соответствующие оптимальные решения \mathbf{m}^{opt} отличаются лишь последней компонентой μ_M^{opt}

Таблица 2.7 — Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 70$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 15556$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.0045	9.18	$2.28 \cdot 10^{-2}$	$4.56 \cdot 10^{-2}$	0.0
4	0.0045	17.92	$8.63 \cdot 10^{-4}$	$1.73 \cdot 10^{-3}$	0.0
6	0.0045	25.90	$1.15 \cdot 10^{-4}$	$2.29 \cdot 10^{-4}$	0.0
8	0.0045	33.21	$2.96 \cdot 10^{-5}$	$5.93 \cdot 10^{-5}$	0.0
10	0.0045	39.96	$1.15 \cdot 10^{-5}$	$2.31 \cdot 10^{-5}$	0.0
12	0.0045	46.27	$5.85 \cdot 10^{-6}$	$1.17 \cdot 10^{-5}$	0.0
14	0.0045	52.24	$3.55 \cdot 10^{-6}$	$7.10 \cdot 10^{-6}$	0.0
16	0.0045	57.93	$2.44 \cdot 10^{-6}$	$4.88 \cdot 10^{-6}$	0.0

и, быть может, порядком чередования предыдущих значений μ_k^{opt} , принимающих одно из двух значений: μ_{min} и μ_{max} , значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ в таблице 2.6 на несколько порядков меньше соответствующего значения $J(\mathbf{m}^{opt})$, где $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$, в таблице 2.5. Это говорит, с одной стороны, об очень сильном влиянии на маскировочную эффективность проектируемой оболочки именно проницаемости μ_M последнего слоя. С другой стороны, это позволяет существенно упростить решение задачи маскировки. Действительно, поскольку первые $M-1$ слоев состоят из чередующихся материалов с проницаемостями μ_{min} и μ_{max} , то для нахождения искомого оптимального решения нет необходимости решать общую M -мерную задачу (2.34), а достаточно решить соответствующую однопараметрическую экстремальную задачу относительно последнего управления μ_M . В том случае, когда найденное значение μ_M^{opt} не соответствует какому-либо известному материалу, возникает чисто техническая трудность, связанная с созданием этого материала. Однако эта трудность не является принципиальной ввиду больших успехов, достигнутых к настоящему времени в создании метаматериалов, обладающих заданными магнитными свойствами. Другой способ избавления от этой трудности, предложенный в [61] для задач тепловой маскировки, состоит в том, чтобы в окрестности μ_M^{opt} выбрать значение $\tilde{\mu}_M^{opt}$, отвечающее доступному природному или инженерному материалу, и заменить μ_M^{opt} значением $\tilde{\mu}_M^{opt}$.

Приведенные ниже графики подтверждают высокую точность и эффективность разработанного итерационного алгоритма.

Графики зависимости минимальных значений $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ функционала качества J_i из таблицы 2.5 (задача экранирования) от номера итерации i для случая $\mu_0 = 1$, $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$ приведены на рисунке 2.2, соответственно, для $M = \{4, 8, 12, 16\}$.

Из графиков итерационного процесса алгоритма на основе метода роя частиц для задачи экранирования видно, что для поиска минимума требуется не более 30 итераций. Кроме того, увеличение числа слоев M в оболочке приводит к уменьшению искомого минимального значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J_i , т.е. к увеличению экранирующей эффективности проектируемой оболочки.

Графики зависимости минимальных значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала качества J из таблицы 2.6 (задача полной маскировки) от номера итерации i для случая $\mu_0 = 1$, $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$ приведены на рисунке 2.3, соответственно, для $M = \{4, 8, 12, 16\}$.

Графики зависимости минимальных значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала качества J из таблицы 2.7 (задача полной маскировки) от номера итерации i для случая $\mu_0 = 1$, $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 70$ приведены на рисунке 2.4, соответственно, для $M = \{4, 8, 12, 16\}$.

Из графиков итерационного процесса алгоритма на основе метода роя частиц для задачи полной маскировки видно, что для поиска минимума требуется большее количество итераций, чем для задачи экранирования, причем с увеличением числа слоев M необходимое количество итераций увеличивается. Кроме того, увеличение числа слоев M или увеличение контраста μ_{max}/μ_{min} приводит к уменьшению искомого минимального значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J , т.е. к увеличению маскировочной эффективности проектируемой оболочки.

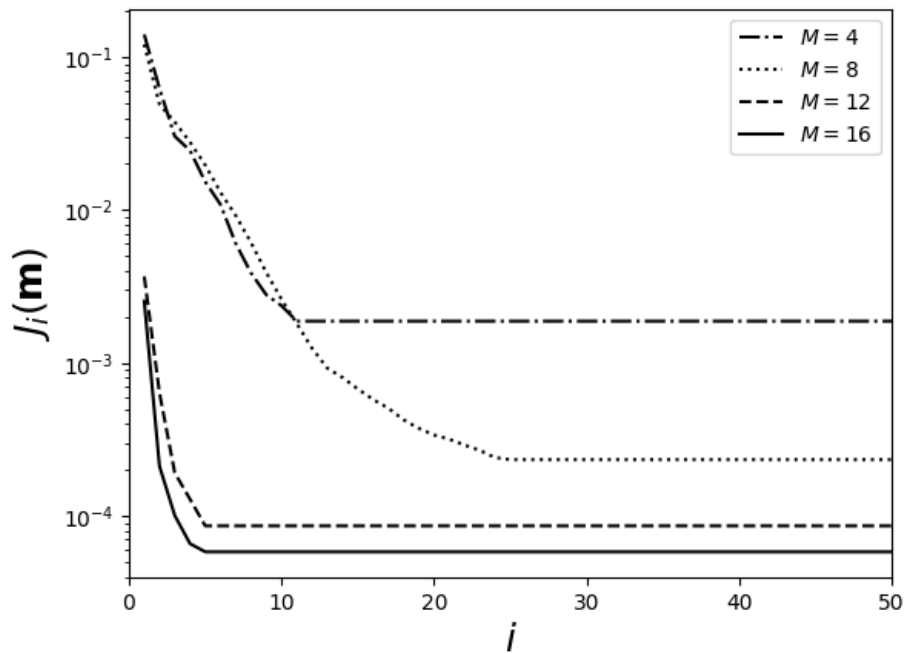


Рисунок 2.2 — Графики зависимости минимальных значений $J_i(\mathbf{m})$ функционала J_i от номера итерации i для различных случаев $M = \{2, 4, 6, 8\}$ из таблицы 2.5.

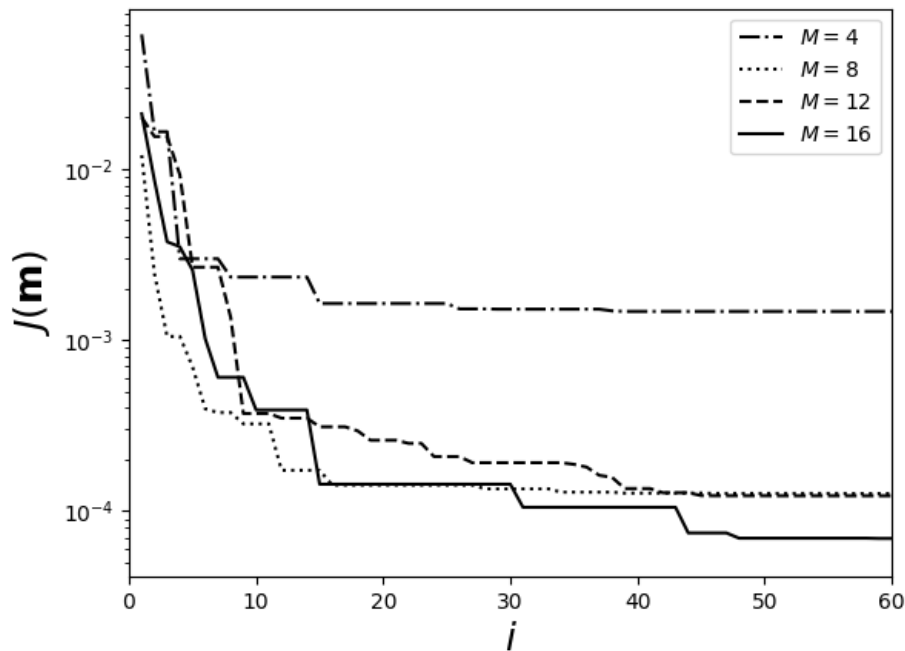


Рисунок 2.3 — Графики зависимости минимальных значений $J(\mathbf{m})$ функционала J от номера итерации i для различных случаев $M = \{2, 4, 6, 8\}$ из таблицы 2.6.

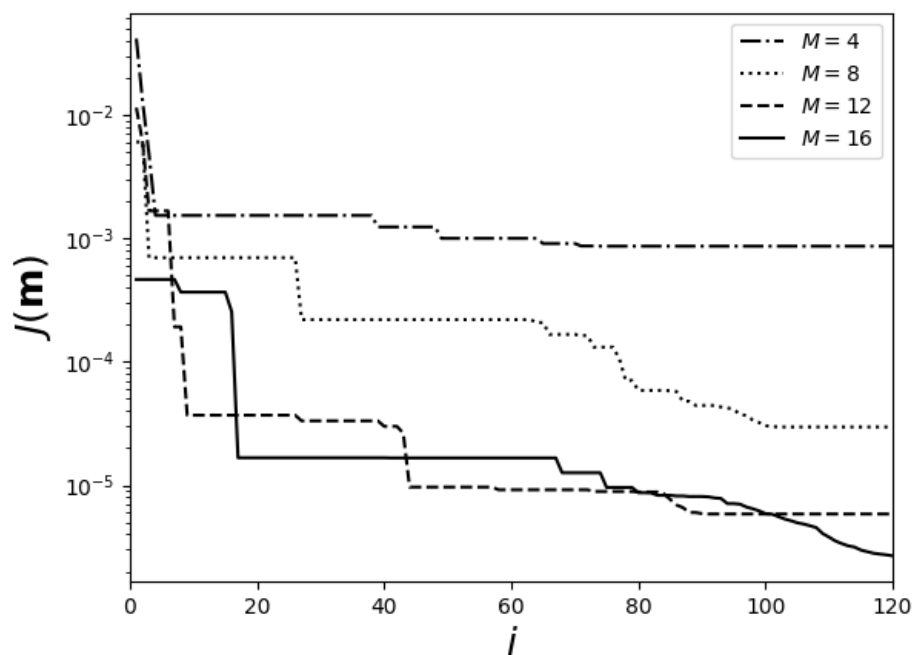


Рисунок 2.4 — Графики зависимости минимальных значений $J(\mathbf{m})$ функционала J от номера итерации i для различных случаев $M = \{2, 4, 6, 8\}$ из таблицы 2.7.

2.6 Случай анизотропной маскировочной оболочки

В этом разделе мы обсудим результаты численных экспериментов по решению обратных задач экранирования и маскировки для двумерной модели магнитостатики (2.3)–(2.5), предполагая, что проектируемое устройство $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ состоит из конечного числа кольцевых анизотропных слоев $(\Omega_m, \boldsymbol{\mu}_m)$, $m = \overline{1, M}$. Это означает, что m -ая подобласть Ω_m области Ω заполнена однородной анизотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью в виде диагонального тензора $\boldsymbol{\mu}_m = \text{diag}(\mu_{rm}, \mu_{\varphi m})$, $m = \overline{1, M}$, где μ_{rm} и $\mu_{\varphi m}$ имеют смысл радиальной и тангенциальной компонент тензоров магнитных проницаемостей $\boldsymbol{\mu}_m$. Глобальные радиальная μ_r и тангенциальная μ_φ компоненты глобального диагонального тензора $\boldsymbol{\mu}$ представимы в виде кусочно-постоянных функций:

$$\mu_r(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_{rm} \chi_m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mu_\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_{\varphi m} \chi_m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.44)$$

Здесь $\chi_m(\mathbf{x})$ – характеристическая функция слоя Ω_m , равная 1 в Ω_m и 0 вне Ω_m . Ясно, что $\mu_r, \mu_\varphi \in L_+^\infty(\Omega)$ при условии, что $\mu_r, \mu_\varphi > 0$. Обозначим $2M$ -мерный вектор, состоящий из коэффициентов $\mu_{rm}, \mu_{\varphi m}$, $m = \overline{1, M}$, в (2.44), через $\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\varphi 1}, \mu_{r2}, \mu_{\varphi 2}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M})$.

Решение задачи сопряжения (2.3)–(2.5), отвечающей случаю анизотропной оболочки, состоящее из $M+2$ полей $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_{M+1}$, рассматриваемых соответственно в областях $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_M, \Omega_{M+1}$, можно представить в следующем виде (см. [73; 93; 116]):

$$\Phi_0(r, \varphi) = (A_0 r / b) \cos \varphi \text{ в } \Omega_0, \quad (2.45)$$

$$\Phi_m(r, \varphi) = ((r/b)^{\gamma_m} A_m + (b/r)^{\gamma_m} B_m) \cos \varphi \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad (2.46)$$

$$\Phi_{M+1}(r, \varphi) = (-H_a r / b + B_{M+1} b / r) \cos \varphi \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (2.47)$$

Здесь A_0, A_m, B_m, B_{M+1} , $m = \overline{1, M}$ – неизвестные коэффициенты, $H_a = \text{const}$, $b = R_M$ и γ_m – коэффициент (степень) анизотропии среды в слое Ω_m , определяемый формулой

$$\gamma_m = \sqrt{\mu_{\varphi m} / \mu_{rm}}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Неизвестные коэффициенты A_0, A_m, B_m, B_{M+1} , $m = \overline{1, M}$, могут быть определены из условий непрерывности (2.4) смежных полей Φ_m и Φ_{m+1} на их

общих границах $r = R_m$, $m = \overline{0, M}$, образующих систему $2M + 2$ линейных алгебраических уравнений, имеющую вид

$$\begin{aligned}
& -A_0 + A_1 c_0^{1-\gamma_1} + B_1 c_0^{1+\gamma_1} = 0, \\
& -\mu_0 A_0 + \mu_{r1} A_1 \gamma_1 c_0^{1-\gamma_1} - \mu_{r1} B_1 \gamma_1 c_0^{1+\gamma_1} = 0, \\
& -A_m c_m^{-\gamma_m} - B_m c_m^{\gamma_m} + A_{m+1} c_m^{-\gamma_{m+1}} + B_{m+1} c_m^{\gamma_{m+1}} = 0, \\
& -\mu_{rm} A_m \gamma_m c_m^{1-\gamma_m} + \mu_{rm} B_m \gamma_m c_m^{1+\gamma_m} + \mu_{r(m+1)} A_{m+1} \gamma_{m+1} c_m^{1-\gamma_{m+1}} - \\
& \quad - \mu_{r(m+1)} B_{m+1} \gamma_{m+1} c_m^{1+\gamma_{m+1}} = 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \\
& -A_M - B_M + B_{M+1} = H_a, \\
& -\mu_{rM} A_M \gamma_M + \mu_{rM} B_M \gamma_M - \mu_{M+1} B_{M+1} = \mu_{M+1} H_a.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Здесь $c_m = b/R_m$, $m = \overline{0, M-1}$, $\mu_0 = \mu_{M+1} = \text{const}$ в Ω_0 и Ω_{M+1} , соответственно. Система (2.48) отвечает $2M$ -мерному вектору магнитных проницаемостей $\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\varphi 1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M})$.

Обратные задачи маскировки и экранирования для рассматриваемого физического сценария формулируются точно так же, как они сформулированы в разд. 2.1 для случая изотропной оболочки, а для их численного решения мы применяем, как в разд. 2.3 – 2.5, оптимизационный метод вместе с методом роя частиц в качестве метода численной оптимизации.

Численное моделирование проводилось для следующих значений a, b, R и μ_0 : $a = 0.04$ м, $b = 0.05$ м, $R = 3$ м, $\mu_0 = 1$, и двух пар значений $(0.08; 20)$ и $(0.02; 50)$, определяющих границы μ_{min} и μ_{max} множества управлений K , где

$$K = \{\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\varphi 1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M}) \in \mathbb{R}^{2M} : 0 < \mu_{min} \leq \mu_{rm}, \mu_{\varphi m} \leq \mu_{max}\}.$$

Наш первый тест связан с решением экстремальной задачи (2.33) с использованием МРЧ для случая полностью анизотропной многослойной оболочки (Ω, \mathbf{m}) для первой пары значений μ_{min} и μ_{max} :

$$\mu_{min} = 0.08 \quad \text{и} \quad \mu_{max} = 20. \tag{2.49}$$

Оптимизационный анализ с помощью МРЧ для различных значений M привел к результатам, представленным в таблице 2.8 в виде оптимальных значений радиальной и тангенциальной компонент μ_{rm}^{opt} и $\mu_{\varphi m}^{opt}$ магнитных проницаемостей слоев (Ω_m, μ_m) и соответствующего минимального значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J_i , где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi 1}^{opt}, \dots, \mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt})$.

Таблица 2.8 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.08$, $\mu_{max} = 20$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 250$, коэффициент анизотропии $\gamma_m \equiv \sqrt{\mu_{\varphi m}/\mu_{rm}} = 15.8$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\varphi2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.08, 20)				3.62·10 ⁻²
2	(0.08, 20)	(0.08, 20)			
4	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
6	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
8	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
10	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
12	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
14	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
16	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	

Из таблицы 2.8 видно, в частности, что оптимальные значения магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают в каждом слое при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_r^{opt} = 0.08$ и $\mu_{\varphi}^{opt} = 20$. В то же время значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ равны значению 3.62×10^{-2} и не меняются с ростом M , причем последнее значение соответствует слабой экранирующей эффективности проектируемой анизотропной экранирующей оболочки. Таким образом, из таблицы 2.8 следует, что решение задачи (2.33) в случае полностью анизотропной оболочки для первой пары параметров $\mu_{min} = 0.08$ и $\mu_{max} = 20$ не обеспечивает ни высоких экранирующих характеристик вследствие выбранной конструкции экранирующей оболочки, ни простоты ее технической реализации вследствие анизотропности отдельных слоев оболочки с коэффициентом анизотропии $\gamma_m = 15.8$.

Для того, чтобы повысить экранирующую эффективность проектируемой оболочки, следует увеличить, как и в случае изотропной оболочки, контраст пары (μ_{min}, μ_{max}) . В этом можно убедиться из анализа таблицы 2.9, являющейся аналогом таблицы 2.8 для пары

$$\mu_{min} = 0.02 \quad \text{и} \quad \mu_{max} = 50 \quad (2.50)$$

с контрастом $\mu_{max}/\mu_{min} = 2500$, которому соответствует коэффициент анизотропии $\gamma_m = \sqrt{\mu_{\varphi m}/\mu_{rm}} = 50$, $m = \overline{1, M}$. Видно, что для каждого значения

M от 2 до 16 функционал качества J_i принимает на оптимальном решении одно и то же значение 1.78×10^{-5} , которому отвечает достаточно высокая экранирующая эффективность оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$, где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt}, \dots, \mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt})$.

Таблица 2.9 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.02$, $\mu_{max} = 50$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 2500$, коэффициент анизотропии $\gamma_m \equiv \sqrt{\mu_{\varphi m}/\mu_{rm}} = 50$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\varphi2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.02, 50)				$1.78 \cdot 10^{-5}$
2	(0.02, 50)	(0.02, 50)			
4	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
6	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
8	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
10	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
12	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
14	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
16	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	

Аналогичные результаты имеют место для задачи полной маскировки (2.34). Чтобы убедиться в справедливости этого факта, применим метод роя частиц для решения экстремальной задачи (2.34), отвечающей задаче дизайна анизотропной маскировочной оболочки, в случае первой пары (2.49).

Оптимизационный анализ с помощью МРЧ для различных значений M привел к результатам, представленным в таблице 2.10 в виде оптимальных значений радиальной и тангенциальной компонент μ_{rm}^{opt} и $\mu_{\varphi m}^{opt}$ магнитных проницаемостей слоев (Ω_m, μ_m) и соответствующего минимального значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J , где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt}, \dots, \mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt})$.

Анализ таблицы 2.10 показывает, что оптимальные значения магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают (как и в случае таблицы 2.8) при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_r^{opt} = 0.08$ и $\mu_{\varphi}^{opt} = 20$. Более того, при любом $M = \overline{1, 16}$ все значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ равны значению 1.91×10^{-2} , которое отвечает слабой маскировочной эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Для того, чтобы повысить маскировочную эффективность проектируемой оболочки, следует увеличить контраст пары (μ_{min}, μ_{max}) . В этом можно убе-

Таблица 2.10 — Задача полной маскировки: $\mu_{min} = 0.08$, $\mu_{max} = 20$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 250$, коэффициент анизотропии $\gamma_m \equiv \sqrt{\mu_{\varphi m}/\mu_{rm}} = 15.8$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\varphi2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.08, 20)				1.91·10 ⁻²
2	(0.08, 20)	(0.08, 20)			
4	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
6	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
8	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
10	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
12	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
14	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
16	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	

даться из анализа таблицы 2.11, являющейся аналогом таблицы 2.10 для пары (2.50), с контрастом $\mu_{max}/\mu_{min} = 2500$, которому соответствует коэффициент анизотропии $\gamma_m = 50$, $m = \overline{1, M}$.

Таблица 2.11 — Задача полной маскировки: $\mu_{min} = 0.02$, $\mu_{max} = 50$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 2500$, коэффициент анизотропии $\gamma_m \equiv \sqrt{\mu_{\varphi m}/\mu_{rm}} = 50$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\varphi2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphi M}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.02, 50)				8.92·10 ⁻⁶
2	(0.02, 50)	(0.02, 50)			
4	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
6	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
8	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
10	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
12	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
14	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	
16	(0.02, 50)	(0.02, 50)	...	(0.02, 50)	

Анализ таблицы 2.11 показывает, что оптимальные значения магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают (как и в случае таблицы 2.9) при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_r^{opt} = 0.02$ и $\mu_{\varphi}^{opt} = 50$. Однако,

в отличие от таблицы 2.10, значение $J(\mathbf{m}^{opt})$, равное при каждом $M = \overline{1,16}$ значению 8.92×10^{-6} , отвечает высокой маскировочной эффективности проектируемой оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Итак, оптимизационный анализ показал, что высокая эффективность проектируемых устройств магнитной маскировки и экранирования может быть достигнута при использовании как однослойных анизотропных оболочек, имеющих форму кольца, с высокой степенью анизотропии, так и многослойных оболочек, состоящих из нескольких изотропных однородных кольцевых слоев с оптимальными постоянными проницаемостями, значения которых находятся с помощью разработанного численного алгоритма на основе МРЧ. Подчеркнем, что высокая экранирующая и маскировочная эффективность, а также простота технической реализации могут быть достигнуты без использования анизотропных метаматериалов. В частности, высокоэффективные экранирующие оболочки состоят только из двух чередующихся природных или инженерных материалов с высоким контрастом магнитных проницаемостей, тогда как высокоэффективные маскировочные оболочки состоят из таких же слоев чередующихся материалов, кроме последнего слоя, который должен быть заполнен специальным инженерным материалом.

Приведенные в этой главе результаты позволяют сделать вывод о том, что использование предложенного алгоритма для решения рассматриваемых обратных задач маскировки и экранирования, основанного на оптимизационном методе, позволяет проектировать маскировочные и экранирующие устройства в виде многослойных кольцевых оболочек, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и одновременно простотой технической реализации. Наши основные результаты были получены для случая однородного внешне приложенного поля. Однако возможность применения оптимизационного метода сохраняется и в случае, когда внешне приложенное поле является неоднородным.

Замечание 2.1. Данная глава написана по материалам работ [23; 25; 58; 99]. В работах [19–21; 40; 41; 54; 57; 100; 113; 117] исследованы близкие по тематике этой главы вопросы, касающиеся акустической, тепловой и электромагнитной маскировки.

Глава 3. Численное решение 3D задачи дизайна осесимметричной магнитной маскировочной оболочки

В этой главе будут исследованы обратные задачи для трехмерной модели магнитостатики, возникающие при проектировании осесимметричных многослойных экранирующих и маскировочных устройств, с помощью оптимизационного метода в предположении, что исходная оболочка состоит из конечного числа сферических слоев, заполненных однородными изотропными либо анизотропными средами. Указанные задачи сводятся к решению соответствующих конечномерных экстремальных задач, роль управлений в которых играют магнитные проницаемости каждого элементарного слоя, входящего в проектируемое устройство. Для нахождения искомых управлений разрабатывается и применяется численный алгоритм, основанный на оптимизационном методе и методе роя частиц [92; 108]. На основе анализа проведенных вычислительных экспериментов показывается, что полученным оптимальным решениям отвечают маскировочные устройства, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и простотой технической реализации.

3.1 Постановка прямой и обратной задач

Задача магнитной маскировки по своей структуре содержит три основные компоненты: область, где рассматривается физический процесс, внешне приложенное магнитное поле и материальную оболочку, служащую для маскировки материальных тел [6]. В трехмерных задачах магнитной маскировки роль основной области играет все пространство \mathbb{R}^3 , исходное внешне приложенное магнитное поле создается компактно распределенными источниками, либо источниками, расположенными в бесконечности, тогда как роль маскировочной оболочки играет область в виде сферического слоя (Ω, μ) . Здесь область Ω имеет в сферических координатах (r, θ, φ) форму сферического слоя $\{a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b – положительные константы, а μ – относительная магнитная проницаемость среды, заполняющей Ω .

Обозначим через $\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < a\}$ и $\Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| > b\}$ внутренность и внешность области Ω , соответственно. Будем предполагать, что эти области Ω_0 и Ω_e^∞ заполнены однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью μ_0 (см рисунок 3.1).

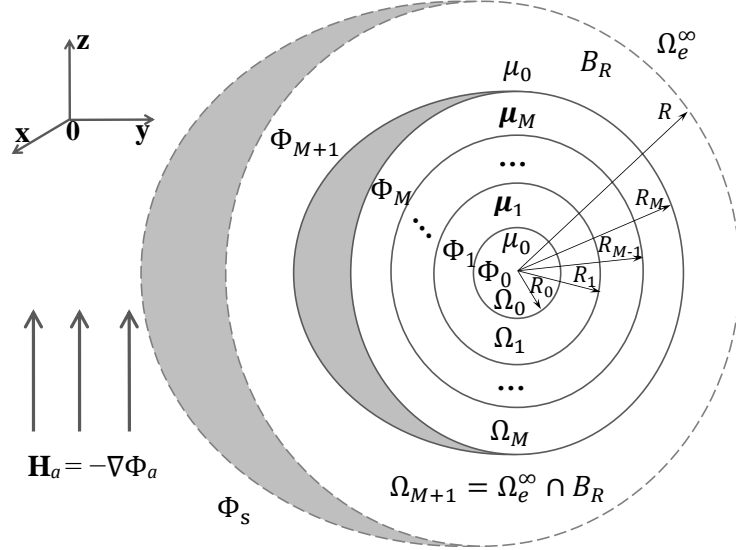


Рисунок 3.1 — Схематическое изображение 3D маскировочной оболочки

Обозначим через B_R шар $|\mathbf{x}| < R$ радиуса R , содержащий внутри себя области Ω_0 и Ω (см. рисунок 3.1), и предположим, что за пределами шара B_R находятся внешние источники, создающие в частном случае, когда $\mu = \mu_0$ в Ω и, следовательно, все пространство \mathbb{R}^3 заполнено однородной средой с постоянной магнитной проницаемостью μ_0 , магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\text{grad } \Phi_a$. Оно описывается магнитным потенциалом Φ_a , сужение которого на шар B_R удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \Phi_a = 0$ в B_R .

Исходя из условий простоты технической реализации проектируемых с помощью оптимизационного метода маскировочных оболочек, будем предполагать в этом разделе и разделах 3.2-3.4, что искомая оболочка (Ω, μ) является слоистой и состоит из M сферических слоев $\Omega_m = \{R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$, $R_0 = a$, $R_M = b$ одной и той же толщины $d = (b-a)/M$. Каждый из них заполнен однородной изотропной средой, магнитные свойства которой характеризуются постоянной магнитной проницаемостью $\mu_m > 0$, $m = 1, 2, \dots, M$. Последнее означает, что магнитная проницаемость μ искомой оболочки (Ω, μ) определяется формулой

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_m \chi_m(\mathbf{x}). \quad (3.1)$$

Здесь $\chi_m(\mathbf{x})$ – характеристическая функция слоя Ω_m .

Наличие оболочки (Ω, μ) внутри B_R приводит к появлению вторичного поля Φ_s . Пусть $\Phi_m = (\Phi_a + \Phi_s)|_{\Omega_m}$, $m = \overline{0, M+1}$, $\Omega_{M+1} = \Omega_e^\infty \cap B_R$, где Φ_s – вторичное поле. Для описанного физического сценария прямая задача магнитостатики сводится к нахождению функций Φ_0 , Φ_m , $m = \overline{1, M}$, в областях Ω_0 и Ω_m и Φ_s в Ω_e^∞ (см. рисунок 3.1), удовлетворяющих следующим уравнениям, условиям сопряжения и условиям на бесконечности:

$$\Delta\Phi_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad \operatorname{div}(\mu_m \nabla\Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad \Delta\Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (3.2)$$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_m \frac{\partial\Phi_m}{\partial r} = \mu_{m+1} \frac{\partial\Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = \overline{0, M}, \quad (3.3)$$

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad \Phi_s(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Ниже будем ссылаться на (3.2)–(3.4) как на задачу магнитного сопряжения, а на Φ_s – как вторичное поле.

В случае, когда μ – диагональный в сферических координатах r, θ, φ тензор $\boldsymbol{\mu}$, причем $\boldsymbol{\mu} = \operatorname{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\theta)$, где μ_r и μ_θ – заданные ограниченные положительные функции, задача (3.2)–(3.4) была исследована теоретически в работе [22] и в разд. 1.3 данной работы. Там же установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование единственного слабого решения. В случае, когда μ – скалярная функция, описывающая переменную магнитную проницаемость изотропной среды, заполняющей область Ω , эти условия, обеспечивающие корректность задачи (3.2)–(3.4), имеют вид

$$\mu \in L^\infty(\Omega), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^0 = \operatorname{const} > 0 \text{ в } \Omega, \quad \Delta\Phi_a = 0 \text{ в } B_R. \quad (3.5)$$

Как уже указывалось, основное внимание в этой главе будет уделено численному анализу обратных задач для модели (3.2)–(3.4), связанных с проектированием устройств маскировки материальных тел. Указанные задачи состоят в нахождении неизвестной магнитной проницаемости μ , исходя из условий маскировки. Чтобы сформулировать их, обозначим через $\tilde{\Phi}^\mu \equiv (\Phi_0^\mu, \Phi^\mu, \Phi_s^\mu)$ решение задачи (3.2)–(3.4), отвечающее проницаемости μ в Ω и проницаемости μ_0 в Ω_0 и Ω_e^∞ . Ниже будем рассматривать общую и две частные обратные задачи маскировки. Общая обратная задача, называемая задачей полной магнитной маскировки, состоит в нахождении магнитной проницаемости μ среды, заполняющей область Ω , исходя из следующих двух независимых условий:

$$\nabla\Phi_0^\mu = 0 \text{ (т.е. } \Phi_0^\mu = \operatorname{const}) \text{ в } \Omega_0, \quad \Phi_s^\mu = 0 \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (3.6)$$

Первое условие в (3.6) относится к поведению внутреннего поля Φ_0^μ (т.е. поля $\tilde{\Phi}^\mu$ внутри области Ω_0), тогда как второе условие в (3.6) описывает поведение рассеянного поля Φ_s^μ во внешности Ω_e^∞ . С учетом этого задачу нахождения проницаемости μ , исходя из выполнения первого условия в (3.6), принято называть задачей внутренней маскировки или задачей экранирования, тогда как задачу нахождения μ , исходя из выполнения второго условия в (3.6), называют задачей внешней маскировки [6]. На саму пару (Ω, μ) , обеспечивающую выполнение первого условия (либо обоих условий) в (3.6), будем ссылаться как на экранирующую (либо маскировочную) оболочку.

3.2 Случай постоянного внешне приложенного поля

Аналогично [79] будем рассматривать ниже важный частный случай, когда внешне приложенное магнитное поле \mathbf{H}_a постоянно во всем пространстве и направлено вдоль оси z . В этом случае, означая, что источники находятся в бесконечности, поле \mathbf{H}_a представимо в виде

$$\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a \text{ в } \mathbb{R}^3, \quad \Phi_a = -H_a r \cos \theta, \quad H_a = |\mathbf{H}_a|. \quad (3.7)$$

Поскольку потенциал Φ_a , введенный в (3.7), и магнитная проницаемость μ , определенная в (3.1), удовлетворяют условиям (3.5) при любом $R > 0$, то точное решение $\tilde{\Phi} \equiv (\Phi_0, \Phi, \Phi_s)$ задачи (3.2)–(3.4), отвечающее упомянутой паре μ и Φ_a в (3.1) и (3.7) (далее опускаем для простоты верхний индекс μ в обозначении решения), существует и единственно. Более того, используя метод Фурье, указанное решение можно записать в явном виде. С этой целью обозначим через $\Phi_m \equiv \Phi|_{\Omega_m}$ сужение компоненты Φ решения $\tilde{\Phi}$ на подобласть $\Omega_m \subset \Omega$, $m = 1, 2, \dots, M$, и положим Φ_0 в Ω_0 , $\Phi_{M+1} = \Phi_a + \Phi_s$ в Ω_e^∞ . Простой анализ показывает, что отдельные компоненты Φ_m (ниже будем ссылаться на них как на поля), позволяющие определить решение $\tilde{\Phi} = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_s)$ во всем пространстве \mathbb{R}^3 , представимы в виде

$$\Phi_0(r, \theta) = \alpha_0 r \cos \theta \text{ в } \Omega_0, \quad (3.8)$$

$$\Phi_1(r, \theta) = (\alpha_1 r + \beta_1/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_1, \quad (3.9)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = (\alpha_2 r + \beta_2/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_2, \quad (3.10)$$

...

$$\Phi_M(r, \theta) = (\alpha_M r + \beta_M/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_M. \quad (3.11)$$

$$\Phi_{M+1}(r, \theta) = \Phi_a(r, \theta) + (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (3.12)$$

Здесь константы $\alpha_0, \alpha_m, \beta_m, m = 1, \dots, M$, и β_{M+1} определяются из условий непрерывности смежных полей Φ_m и Φ_{m+1} на общих границах $r = R_m, m = 0, 1, \dots, M$, имеющих вид

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \mu_{m+1} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (\mu_{M+1} = \mu_0). \quad (3.13)$$

Под Φ_m при $m = 0$ и $M + 1$ в (3.13) понимаем, соответственно, Φ_0 и $\Phi_a + \Phi_s$.

Подставляя (3.8)–(3.12) в (3.13), приходим к следующей системе $2M + 2$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\alpha_0, \alpha_m, \beta_m, m = 1, \dots, M$, и β_{M+1} :

$$-R_0^3 \alpha_0 + R_0^3 \alpha_1 + \beta_1 = 0,$$

$$-\mu_0 R_0^3 \alpha_0 + \mu_1 R_0^3 \alpha_1 - 2\mu_1 \beta_1 = 0, \quad (3.14)$$

$$R_1^3 \alpha_1 - R_1^3 \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2 = 0,$$

$$\mu_1 R_1^3 \alpha_1 - \mu_2 R_1^3 \alpha_2 - 2\mu_1 \beta_1 + 2\mu_2 \beta_2 = 0, \quad (3.15)$$

...

$$R_m^3 \alpha_m - R_m^3 \alpha_{m+1} + \beta_m - \beta_{m+1} = 0, \quad (3.16)$$

$$\mu_m R_m^3 \alpha_m - \mu_{m+1} R_m^3 \alpha_{m+1} - 2\mu_m \beta_m + 2\mu_{m+1} \beta_{m+1} = 0, \quad m = 2, \dots, M - 1, \quad (3.17)$$

...

$$-R_M^3 \alpha_M - \beta_M + \beta_{M+1} = H_a R_M^3,$$

$$-\mu_M R_M^3 \alpha_M + 2\mu_M \beta_M - 2\mu_0 \beta_{M+1} = \mu_0 H_a R_M^3. \quad (3.18)$$

Решив систему (3.14)–(3.18) относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_0, \alpha_m, \beta_m, m = 1, \dots, M$, и β_{M+1} и подставив найденные значения в (3.8)–(3.12), получим соответствующие поля Φ_m в $\Omega_m, m = 0, 1, \dots, M$, и $\Phi_s = \Phi_{M+1} - \Phi_a = (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta$ в Ω_e^∞ , образующие искомое решение задачи (3.2)–(3.4). Ясно, что так полученные поля Φ_0, Φ_m и Φ_s зависят от постоянных проницаемостей $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M$ слоев $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$. Поэтому рассматриваемые нами обратные задачи магнитной маскировки сводятся при выполнении условия (3.7)

к поиску таких проницаемостей μ_1, \dots, μ_M , что соответствующее им решение $(\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_s)$, определяемое формулами (3.8)–(3.12), удовлетворяет точно или приближенно одному или обоим условиям в (3.6).

В простейшем случае, когда число слоев M равно 2, соответствующее точное решение $(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_s)$ определяется формулами (3.8)–(3.12), в которых следует положить $M = 2$. Здесь неизвестные коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ и β_3 являются решением системы шести линейных алгебраических уравнений, состоящей из (3.14), (3.15) и (3.18), где следует положить $M = 2$. Из (3.8)–(3.12) вытекает, что первое (либо второе) условие в (3.6) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_0 = 0$ (либо $\beta_3 = 0$). Используя аналитический модуль пакета Wolfram Mathematica, точные выражения для коэффициентов α_0 и β_3 можно записать в виде

$$\alpha_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Delta_{\alpha_0}}{\Delta} = -\frac{27H_a\mu_0\mu_1\mu_2R_0^3R_1^3R_2^3}{\Delta}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \beta_3(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Delta_{\beta_3}}{\Delta} = & \frac{H_aR_0^3R_2^3(\mu_0(3\mu_1\mu_2R_1^3(R_0^3 - R_2^3) - 2\mu_1^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3)) + \\ & + 2\mu_2^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3)) + 2\mu_1\mu_2(-\mu_2(R_0^3 + 2R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) - \\ & - \mu_1(R_0^3 - R_1^3)(2R_1^3 + R_2^3)) + \mu_0^2(\mu_1(2R_0^3 + R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + \mu_2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 + 2R_2^3))}{\Delta} \end{aligned} \quad (3.20)$$

где определитель Δ системы (3.14), (3.15), (3.18) при $M = 2$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta = & R_0^3(2\mu_1\mu_2(-\mu_2(R_0^3 + 2R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) - \mu_1(R_0^3 - R_1^3)(2R_1^3 + R_2^3)) - \\ & - 2\mu_0^2(\mu_1(2R_0^3 + R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + \mu_2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 + 2R_2^3)) + \mu_0(4\mu_1^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) \\ & + 2\mu_2^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + 3\mu_1\mu_2(2R_1^6 + 3R_1^3R_2^3 + 2R_0^3(R_1^3 + R_2^3))))). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из (3.19) следует в предположении $\mu_0 > 0$, что $\alpha_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = 0$ (либо $\mu_2 = 0$). Подставляя $\mu_1 = 0$ в (3.20), выводим, что

$$\beta_3(0, \mu_2) = \beta_3 = \frac{H_aR_2^3(2\mu_2(R_1^3 - R_2^3) + \mu_0(R_1^3 + 2R_2^3))}{2\mu_2(R_1^3 - R_2^3) - 2\mu_0(R_1^3 + 2R_2^3)}. \quad (3.22)$$

Полагая $\beta_3 = 0$ в (3.22), получаем линейное уравнение относительно неизвестной проницаемости μ_2 . Его решение, обеспечивающее выполнение условия $\beta_3 = 0$, имеет вид

$$\mu_2 = \mu_2^0 \equiv \mu_0 \frac{2R_2^3 + R_1^3}{2(R_2^3 - R_1^3)}. \quad (3.23)$$

Из построения следует, что пара $(\mu_1, \mu_2) = (0, \mu_2^0)$ является искомым решением обратной задачи полной маскировки. Впервые указанное решение было приведено в [79]. Хотя построенное точное решение описывается простой формулой (3.23), его техническая реализация не представляется возможной (вследствие условия $\mu_1 = 0$) из-за отсутствия природных либо инженерных материалов с нулевой магнитной проницаемостью. Ввиду этого, указанное решение $(0, \mu_2^0)$ называют сингулярным. Один из способов преодоления трудностей с технической реализацией решений задач магнитной маскировки состоит в замене исходных обратных задач соответствующими приближенными задачами и в применении для решения последних задач оптимизационных методов, позволяющих учесть требования, связанные с технической реализацией отыскиваемых решений.

3.3 Применение оптимизационного метода. Формулировка экстремальных задач

Для решения сформулированных выше обратных задач применим оптимизационный метод [44]. В соответствии с этим методом обратные задачи магнитной маскировки заменяются соответствующими экстремальными задачами, которые адекватно отвечают рассматриваемым обратным задачам. Указанные задачи заключаются в минимизации определенных функционалов качества, зависящих от магнитных проницаемостей μ_1, \dots, μ_M отдельных слоев $\Omega_1, \dots, \Omega_M$. Чтобы сформулировать их, введем в рассмотрение M -мерный вектор $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$, на который будем ссылаться как на вектор магнитных проницаемостей, и определим ограниченное множество K в пространстве \mathbb{R}^M формулой

$$K = \{\mathbf{m} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) : 0 < \mu_{min} \leq \mu_j \leq \mu_{max}, j = 1, 2, \dots, M\}. \quad (3.24)$$

На введенное множество K , где заданные положительные константы μ_{min} и μ_{max} определяют его нижнюю и верхнюю границы, будем ссылаться как на множество управлений. Напомним, что введение множества K по формуле (3.24) отвечает так называемой схеме коробки или схеме простых ограничений.

Введем переобозначение $\Phi[\mathbf{m}] = (\Phi_0[\mathbf{m}], \Phi[\mathbf{m}], \Phi_s[\mathbf{m}])$ для решения $\tilde{\Phi}^\mu \equiv (\Phi_0^\mu, \Phi^\mu, \Phi_s^\mu)$ задачи (3.2)–(3.4), отвечающего магнитной проницаемости μ в Ω , связанной с вектором $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \in K$ формулой (3.1). Кроме того, в аналогичной ситуации будем использовать обозначение (Ω, \mathbf{m}) для маскировочной оболочки вместо обозначения (Ω, μ) . Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$.

Предполагая ниже, что вектор $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ принадлежит множеству управлений K , сформулируем следующие три экстремальных задачи:

$$J_i(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K, \quad (3.25)$$

$$J_e(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K, \quad (3.26)$$

$$J(\mathbf{m}) = 0.5[J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})] \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K. \quad (3.27)$$

Здесь функционалы качества $J_i(\mathbf{m})$, $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$ определяются формулами

$$J_i(\mathbf{m}) = \frac{\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}}, \quad J_e(\mathbf{m}) = \frac{\|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}}, \quad J(\mathbf{m}) = 0.5[J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})]. \quad (3.28)$$

Напомним, в частности, что $\Phi_a = -H_a r \cos \theta$ – потенциал заданного внешне приложенного поля, а L^2 -нормы, входящие в (3.28), определяются формулами

$$\begin{aligned} \|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |\Phi_a|^2 d\mathbf{x}, & \|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_a|^2 d\mathbf{x}, \\ \|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |\Phi_s[\mathbf{m}]|^2 d\mathbf{x}, & \|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Из вида функционала $J_i(\mathbf{m})$ следует, что условие $J_i(\mathbf{m}^*) = 0$ на некотором векторе $\mathbf{m}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_M^*) \in K$ эквивалентно тому, что $\nabla\Phi_0[\mathbf{m}^*] = 0$ в Ω_0 . Это означает, что отвечающая вектору \mathbf{m}^* в силу формулы (3.1) проницаемость $\mu^*(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_m^* \chi_m(\mathbf{x})$ является решением задачи экранирования. Аналогично, условие $J_e(\mathbf{m}^*) = 0$ эквивалентно тому, что рассеянное поле $\Phi_s^{\mu^*} \equiv \Phi_s[\mathbf{m}^*]$ обращается в нуль всюду в подобласти $\Omega_e \equiv \Omega_e^\infty \cap B_R$ области Ω_e^∞ . Отсюда вытекает в силу принципа единственного продолжения гармонической в Ω_e^∞ функции $\Phi_s^{\mu^*}$, что $\Phi_s^{\mu^*} = 0$ всюду в Ω_e^∞ . Последнее эквивалентно тому, что проницаемость μ^* является решением задачи внешней маскировки. Наконец, условие $J(\mathbf{m}^*) \equiv 0.5[J_i(\mathbf{m}^*) + J_e(\mathbf{m}^*)] = 0$ означает, что проницаемость μ^* является решением задачи полной маскировки.

Способность проектируемой оболочки (Ω, \mathbf{m}) экранировать либо маскировать материальные объекты характеризуется так называемой экранирующей

либо маскировочной эффективностью. Количественно указанные характеристики описывают точность, с которой выполняются оба условия в (3.6), либо одно из этих условий. Простой анализ формул (3.28), (3.29) показывает, что введенные выше функционалы $J_i(\mathbf{m})$, $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$ имеют наглядный смысл среднеквадратичных интегральных ошибок выполнения первого, второго или обоих условий маскировки в (3.6) на векторе $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$.

Из сказанного вытекает, что для оценки экранирующей либо маскировочной эффективности проектируемой оболочки (Ω, \mathbf{m}) следует использовать именно значения $J_i(\mathbf{m})$, $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$ функционалов J_i, J_e и J . Так, маскировочную эффективность оболочки (Ω, \mathbf{m}) следует оценивать при помощи значения $J(\mathbf{m})$, которое связано с ней обратной зависимостью: чем меньше значение $J(\mathbf{m})$, тем выше маскировочная эффективность оболочки (Ω, \mathbf{m}) , и наоборот. В частности, условие $J(\mathbf{m}^*) = 0$ для некоторого $\mathbf{m}^* \in K$, математически эквивалентное тому, что \mathbf{m}^* является точным решением задачи полной маскировки, физически означает, что соответствующая маскировочная оболочка обладает наивысшей маскировочной эффективностью.

Но нужно отметить, что введенный в (3.28) функционал $J \equiv 0.5(J_i + J_e)$ необходимо удовлетворяет условию $J(\mathbf{m}) > 0$ для всех $\mathbf{m} \in K$, где K – любое ограниченное множество, введенное в (3.24). Фактически это вытекает из того известного в теории маскировки факта (см., например, [6; 83]), что проницаемость μ , обеспечивающая точный маскировочный эффект, и, следовательно, отвечающая в силу (3.1) вектору $\mathbf{m} \in K$, для которого $J(\mathbf{m}) = 0$, необходимо должна принимать сингулярные (например, нулевые) значения в некоторых точках множества $\bar{\Omega}$. В то же время проницаемость $\mu(\mathbf{x})$, определенная формулой (3.1), является регулярной положительной в $\bar{\Omega}$ функцией для любого вектора $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ с положительными μ_m . Поэтому наша цель при решении, например, задачи (3.27) при заданном множестве K будет заключаться в том, чтобы найти вектор проницаемостей (оптимальное решение задачи (3.27)) $\mathbf{m}^{opt} \in K$, на котором функционал J принимает минимальное на множестве K значение $J^{opt} = J(\mathbf{m}^{opt})$, а следовательно, проектируемая оболочка $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$ обладает максимальной (на множестве K) маскировочной эффективностью. На аналогичные цели направлены задачи (3.25) и (3.26).

Для реализации указанных целей применим численный алгоритм, основанный на методе роя частиц (МРЧ) [108]. Напомним, что МРЧ был предложен в 1995 г. в работе [92] и подробно описан в главе 2 настоящей работы. Он не

использует значений производных от минимизируемого функционала, является достаточно универсальным и простым при численной реализации. Поэтому в последнее время этот метод широко применяется при решении большого класса обратных и экстремальных задач в различных областях науки и техники. Указанный метод применялся, в частности, в статьях [12; 13; 26; 61] при численном решении двумерной и трехмерной задач статической маскировки при помощи оболочек, состоящих из однородных изотропных (либо анизотропных, в общем случае) материалов. Основную роль в описанном алгоритме играет вычисление значений $J(\mathbf{m})$ минимизируемого функционала J для конкретного вектора $\mathbf{m} \in K$, моделирующего положения конкретных частиц, составляющих используемый рой. С учетом особенностей предложенного выше метода решения прямой задачи магнитной маскировки указанная процедура состоит из двух этапов.

На первом этапе находим компоненты α_0 и β_{M+1} решения системы (3.14)–(3.18) для конкретного вектора $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ с использованием пакета Matlab R2019a и, подставив найденные значения α_0 и β_{M+1} в формулы (3.8)–(3.12), содержащие поля $\Phi_0 \equiv \alpha_0 r \cos \theta$ и $\Phi_s \equiv (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta$, находим внутреннее и рассеянное поля $\Phi_0[\mathbf{m}] = \alpha_0 r \cos \theta$ и $\Phi_s[\mathbf{m}] = (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta$, отвечающие конкретному вектору \mathbf{m} . Далее подставляем найденные выражения $\Phi_0[\mathbf{m}]$ и $\Phi_s[\mathbf{m}]$ в (3.28) и вычисляем соответствующие интегралы, определяющие нормы, входящие в (3.29), с помощью следующих аналитических формул:

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_a|^2 d\mathbf{x} = \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\nabla\Phi_a|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi R_0^3 H_a^2, \\ \|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &= \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]|^2 dx = \\ &= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi \alpha_0^2 R_0^3, \\ \|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} \Phi_a^2 dx = \\ &= H_a^2 \int_{R_M}^{R_{M+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 \cos^2\theta \sin\theta dr d\theta d\varphi = H_a^2 \pi \frac{4(R_{M+1}^5 - R_M^5)}{15}, \\ \|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \\ &= \int_{R_M}^{R_{M+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\beta_{M+1})^2/r^2] \cos^2\theta \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi\beta_{M+1}^2(R_{M+1} - R_M)}{3R_MR_{M+1}}, \end{aligned}$$

$$J_i(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}^2}} = \frac{|\alpha_0|}{|H_a|}, \quad (3.30)$$

$$J_e(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{\|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2}} = \frac{|\beta_{M+1}|}{|H_a|} \sqrt{\frac{5(R_{M+1} - R_M)}{R_M R_{M+1}(R_{M+1}^5 - R_M^5)}}, \quad (3.31)$$

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} [J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})] = \frac{|\alpha_0|}{2|H_a|} + \frac{|\beta_{M+1}|}{2|H_a|} \sqrt{\frac{5(R_{M+1} - R_M)}{R_M R_{M+1}(R_{M+1}^5 - R_M^5)}}. \quad (3.32)$$

Здесь R_0, R_1, \dots, R_M – величины (радиусы сфер), введенные в (3.13), $R_{M+1} = R$.

Важно отметить, что все приведенные выше интегралы вычисляются точно, поэтому этот этап не вносит дополнительной ошибки в процедуру нахождения решения. Это важно в вычислительном плане, поскольку рассматриваемые обратные задачи относятся к классу некорректных задач. Тем не менее с учетом плохой обусловленности системы (3.14)–(3.18) в общем случае задание ее коэффициентов, нахождение решения и все другие расчеты производились с достаточно высокой точностью, обеспечиваемой правилами пакета Matlab R2019a.

3.4 Анализ результатов вычислительных экспериментов

Обсудим в данном разделе некоторые результаты по численному решению рассматриваемых задач магнитной маскировки с использованием метода роя частиц (МРЧ). Численное моделирование проводилось для следующих исходных данных:

$$a = 0.035 \text{ м}, \quad b = 0.05 \text{ м}, \quad \mu_0 = 1, \quad R = 0.7 \text{ м}. \quad (3.33)$$

Внешне приложенное магнитное поле имеет вид (3.7). Основное внимание будет уделено анализу вычислительных экспериментов по решению задачи экранирования (3.25) либо задачи полной маскировки (3.27).

Напомним, что параметр R входит в виде R_{M+1} в формулы (3.31), (3.32) для вычисления $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$. Анализ этих формул в сравнении с (3.6) показывает, что чем больше R , тем больше информации об условии $\Phi_s = 0$ в Ω_e^∞ , входящем в (3.6), учитывается в выражениях (3.31), (3.32). Отсюда следует,

что точность решения задач внешней и полной маскировки должна увеличиваться с увеличением R . Этот же факт подтвердили численные эксперименты, проводимые (в случае, когда $a = 0.035m$, $b = 0.05m$) при разных значениях R , равных $0.07m$, $0.1m$, $0.15m$ и $0.7m$, причем дальнейшее увеличение R не приводило к сколь-нибудь заметным различиям в результатах. По этой причине приводимые ниже результаты расчетов в таблицах 3.1–3.7 относятся именно к значению $R = 0.7m$ в (3.33).

Анализ большого количества проведенных вычислительных экспериментов по решению задачи (3.25) позволил выявить весьма интересную тенденцию в поведении компонент μ_m^{opt} ее оптимального решения $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt}, \dots, \mu_M^{opt})$. Оказалось (при определенных условиях на исходные данные задачи (3.25)), что оптимальные значения μ_m^{opt} всех параметров μ_m с нечетными индексами $m = 1, 3, 5, \dots, M-1$ совпадают с одной из границ μ_{min}, μ_{max} множества управлений K , тогда как оптимальные значения $\mu_2^{opt}, \mu_4^{opt}, \dots, \mu_M^{opt}$ остальных параметров (с четными индексами) совпадают с другой границей. Таким образом, выполняются соотношения:

$$\mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_M^{opt} = \mu_{max}, \quad (3.34)$$

либо

$$\mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{max}, \quad \mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_M^{opt} = \mu_{min}. \quad (3.35)$$

Следуя [26; 61], будем ссылаться на (3.34) (либо на (3.35)) как на соотношения чередующегося дизайна 1-го (либо 2-го) типа. Напомним, что под термином “чередующийся дизайн” в теории маскировки понимают решение в виде слоистой оболочки, состоящей из конечного числа слоев, заполненных чередующимися (по слоям) материалами с большим (определенным) отношением параметров указанных материалов [85]. Указанное отношение принято называть их контрастом. Одним из условий, обеспечивающих выполнение условия (3.34) (либо (3.35)), является условие

$$\mu_0^2 - \mu_{min}\mu_{max} \geq 0. \quad (3.36)$$

Из (3.34) (либо (3.35)) следует, что для соответствующего оптимального решения $\mathbf{m}^{opt} \equiv (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt}, \dots, \mu_M^{opt})$ задачи (3.25) справедлив аналог так называемого свойства bang-bang (или принципа релейности). Согласно этому свойству

каждая компонента μ_m^{opt} оптимального решения принимает одно из двух значений μ_{min} , μ_{max} , являющихся границами множества K [70]. Как будет видно ниже, именно это свойство играет основополагающую роль для получения легко реализуемых решений рассматриваемых задач.

Обсудим теперь результаты решения задачи экранирования (3.25) для трех конкретных тестов, отвечающих следующим трем парам (μ_{min}, μ_{max}) :

$$1) (0.025, 40), \quad 2) (0.0045, 40) \quad \text{и} \quad 3) (0.0045, 70). \quad (3.37)$$

Отметим, что все введенные в (3.37) значения, кроме $\mu_{min} = 0.025$, отвечают магнитным проницаемостям известных материалов. Например, значение $\mu = 40$ описывает относительную магнитную проницаемость закаленной нержавеющей стали, значение $\mu = 70$ отвечает магнитной проницаемости кобальта, тогда как значение $\mu = 0.0045$ отвечает известному метаматериалу, который широко используется в приложениях [80; 89]. Подчеркнем, что все пары в (3.37) удовлетворяют условию (3.36).

Результаты решения с помощью МРЧ задачи (3.25) для первой пары (μ_{min}, μ_{max}) в (3.37) с контрастом $\mu_{max}/\mu_{min} = 40/0.025 = 1600$ для четных значений M , изменяющихся от 2 до 16, приведены в таблице 3.1. Она содержит оптимальные значения μ_1^{opt}, μ_M^{opt} магнитных проницаемостей первого и последнего слоев, совпадающие в силу (3.35) с μ_{max} и μ_{min} , соответственно, и оптимальные значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ функционала $J_i(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt} \equiv (\mu_{max}, \mu_{min}, \mu_{max}, \dots, \mu_{min})$, вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ и $J(\mathbf{m}^{opt})$ (для сравнения) для четных значений M , изменяющихся от 2 до 16. Остальные значения управлений μ_m^{opt} , $m = 2, 3, \dots, M - 1$ определяются из соотношений (3.35), где следует положить $\mu_{min} = 0.025$, $\mu_{max} = 40$. Анализ таблицы 3.1 показывает, что при изменении M от 2 до 16 значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ изменяются в пределах от $2.16 \cdot 10^{-2}$ до значения $1.28 \cdot 10^{-4}$, которое соответствует низкой экранирующей эффективности.

Из общих соображений (см. детали в [61]) следует, что для повышения экранирующей эффективности следует увеличить контраст μ_{max}/μ_{min} . Этого можно добиться как за счет уменьшения μ_{min} , так и за счет увеличения μ_{max} . Полагая в соответствии со вторым сценарием в (3.35) $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, чему соответствует контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 8889$, и применяя МРЧ к задаче (3.25), получим результаты, приведенные в таблице 3.2, которая является аналогом таблицы 3.1 для новой пары $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.0045, 40)$. Она

Таблица 3.1 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.025$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 40/0.025 = 1600$, $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	40	0.025	$2.16 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$
4	40	0.025	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$1.83 \cdot 10^{-3}$	$9.02 \cdot 10^{-4}$
6	40	0.025	$8.46 \cdot 10^{-4}$	$7.68 \cdot 10^{-4}$	$6.91 \cdot 10^{-4}$
8	40	0.025	$4.08 \cdot 10^{-4}$	$4.69 \cdot 10^{-4}$	$5.29 \cdot 10^{-4}$
10	40	0.025	$2.55 \cdot 10^{-4}$	$3.30 \cdot 10^{-4}$	$4.06 \cdot 10^{-4}$
12	40	0.025	$1.86 \cdot 10^{-4}$	$2.48 \cdot 10^{-4}$	$3.10 \cdot 10^{-4}$
14	40	0.025	$1.50 \cdot 10^{-4}$	$1.92 \cdot 10^{-4}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$
16	40	0.025	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-4}$	$1.74 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3.2 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 40/0.0045 = 8889$, $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	40	0.0045	$4.14 \cdot 10^{-3}$	$2.78 \cdot 10^{-3}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$
4	40	0.0045	$1.10 \cdot 10^{-4}$	$7.30 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$
6	40	0.0045	$7.97 \cdot 10^{-6}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$
8	40	0.0045	$1.08 \cdot 10^{-6}$	$6.19 \cdot 10^{-4}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$
10	40	0.0045	$2.25 \cdot 10^{-7}$	$5.93 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^{-3}$
12	40	0.0045	$6.46 \cdot 10^{-8}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$
14	40	0.0045	$2.36 \cdot 10^{-8}$	$5.48 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-3}$
16	40	0.0045	$1.04 \cdot 10^{-8}$	$5.28 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$

содержит оптимальные значения μ_1^{opt} , μ_M^{opt} магнитных проницаемостей первого и последнего слоев, совпадающие в силу (3.35) с μ_{max} и μ_{min} , соответственно, и оптимальные значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ функционала $J_i(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$, вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ и $J(\mathbf{m}^{opt})$. Анализ таблицы 3.2 показывает, что значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ изменяются в пределах от $4.14 \cdot 10^{-3}$ до $1.04 \cdot 10^{-8}$ при увеличении M от 2 до 16. В то же время значения $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ и $J(\mathbf{m}^{opt})$, приведенные в двух последних столбцах таблицы 3.2, достаточно велики. Это, естественно, связано с тем, что мы минимизируем именно функционал $J_i(\mathbf{m})$.

Последнее значение $J_i(\mathbf{m}^{opt}) = 1.04 \cdot 10^{-8}$ (при $M = 16$) соответствует очень высокой экранирующей эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$,

причем проектируемая в рамках теста 2 оболочка $(\Omega, \mathbf{m}^{alt})$ допускает простую техническую реализацию, поскольку она состоит из слоев, заполненных чередующимися распространёнными материалами. Первым из них является распространённый инженерный материал – закаленная нержавеющая сталь с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 40$, вторым является известный метаматериал с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 0.0045$ [80; 89].

Наконец, выбрав в качестве следующего теста третий сценарий в (3.37), когда $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 70$ и применяя МРЧ, получим результаты, приведенные в таблице 3.3, являющейся аналогом таблицы 3.1 для третьей пары (μ_{min}, μ_{max}) в (3.37). Видно, что при увеличении M от 2 до 16 значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ уменьшаются от $2.43 \cdot 10^{-3}$ до значения $2.45 \cdot 10^{-10}$, которое отвечает очень высокой экранирующей эффективности.

Таблица 3.3 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 70$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 15556$, $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	70	0.0045	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$1.92 \cdot 10^{-3}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$
4	70	0.0045	$3.80 \cdot 10^{-5}$	$6.94 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$
6	70	0.0045	$1.64 \cdot 10^{-6}$	$6.46 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$
8	70	0.0045	$1.35 \cdot 10^{-7}$	$6.17 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
10	70	0.0045	$1.77 \cdot 10^{-8}$	$5.90 \cdot 10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$
12	70	0.0045	$3.28 \cdot 10^{-9}$	$5.64 \cdot 10^{-4}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$
14	70	0.0045	$8.03 \cdot 10^{-10}$	$5.41 \cdot 10^{-4}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$
16	70	0.0045	$2.45 \cdot 10^{-10}$	$5.18 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3.4 — Задача маскировки: $M=2$. $\mu_{min}^n=10^{-n}$, $n = 1, \dots, 12$, $\mu_{max} = 10$

μ_{min}	μ_{max}	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
10^{-1}	10.0	10	0.1000000000	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$2.20 \cdot 10^{-1}$	$5.86 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	10.0	10	0.0100000000	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$3.06 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	10.0	10^{-4}	<u>3.38595617966</u>	$3.90 \cdot 10^{-4}$	$7.80 \cdot 10^{-4}$	0.0
10^{-6}	10.0	10^{-6}	<u>3.38725605599</u>	$3.90 \cdot 10^{-6}$	$7.80 \cdot 10^{-6}$	0.0
10^{-8}	10.0	10^{-8}	<u>3.38726906202</u>	$3.90 \cdot 10^{-8}$	$7.80 \cdot 10^{-8}$	0.0
10^{-10}	10.0	10^{-10}	<u>3.38726919208</u>	$3.90 \cdot 10^{-10}$	$7.80 \cdot 10^{-10}$	0.0
10^{-12}	10.0	10^{-12}	<u>3.38726919338</u>	$3.90 \cdot 10^{-12}$	$7.80 \cdot 10^{-12}$	0.0

Обсудим теперь результаты вычислительных экспериментов по решению задачи полной маскировки (3.27). Предварительно напомним, что в физической литературе общепринято в качестве решения задачи маскировки использовать решение \mathbf{m}^{alt} , отвечающее чередующемуся дизайну [6; 85]. Это связано с тем, что оболочку, состоящую из чередующихся слоев с большим контрастом, принято считать хорошей аппроксимацией анизотропной оболочки, которая получается в результате применения для решения задач дизайна устройств маскировки метода, основанного на ТО подходе [106]. Однако, как показывает анализ таблиц 3.1–3.3, оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{alt})$, отвечающие схеме чередующегося дизайна, обладают низкой маскировочной эффективностью. Действительно, в то время как значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$, где $\mathbf{m}^{opt} = \mathbf{m}^{alt}$, приведенные в таблицах 3.2 и 3.3, достаточно малы при M , близких к 16, отвечая высокой экранирующей эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{alt})$, значения $J(\mathbf{m}^{opt})$, наоборот, относительно велики, имея порядок $10^{-3} - 10^{-4}$ даже при M , близких к 16, что отвечает низкой маскировочной эффективностью. Для того, чтобы получить решение задачи маскировки, обладающее высокой маскировочной эффективностью, необходимо решить именно экстремальную задачу (3.27), отвечающую задаче полной маскировки.

Начнем анализ результатов решения задачи (3.27) с анализа простейшего случая двухслойной оболочки ($M = 2$). Напомним, что в этом случае существует точное решение $(0, \mu_2^0)$ задачи полной маскировки, где μ_2^0 определяется формулой (3.23). Простые вычисления с учетом соотношений (3.33), согласно которым $R_0 = a = 0.035\text{м}$, $R_1 = (a + b)/2 = 0.0425\text{м}$, $R_2 = b = 0.05\text{м}$, показывают, что $\mu_2^0 = \mu_0(2R_2^3 + R_1^3)/(2(R_2^3 - R_1^3)) = 3.38726919339$. (Последнее значение записано с 11-ю верными цифрами после запятой). С учетом этого зафиксируем верхнюю границу $\mu_{max} = 10$, а в качестве нижней границы μ_{min} выберем убывающую последовательность $\mu_1^n = 10^{-n}$. Результаты решения задачи (3.27) в виде оптимальных проницаемостей μ_1^{opt}, μ_2^{opt} и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала $J(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$, представлены вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ и $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ (для сравнения) в таблице 3.4 для ряда значений μ_1^n , изменяющихся от 10^{-1} до 10^{-12} .

Анализ таблицы 3.4 показывает, что с уменьшением нижней границы μ_{min} множества K от 10^{-1} до 10^{-12} , чему соответствует увеличение контраста μ_{max}/μ_{min} от 100 до 10^{13} , оптимальное решение $(\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$ задачи полной маскировки (3.27), найденное с помощью МРЧ, при стремлении μ_{min} к нулю

приближается к точному (сингулярному) решению $(0, \mu_2^0)$ задачи полной маскировки. При этом значение $J(\mathbf{m}^{opt})$, где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_1^{opt}, \mu_2^{opt})$, изменяется от $1.10 \cdot 10^{-1}$ при $\mu_{min} = 10^{-1}$ до значения $3.90 \cdot 10^{-12}$ при $\mu_{min} = 10^{-12}$, отвечающего очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$. Указанные факты подтверждают высокую точность используемого нами оптимизационного метода для решения обратной задачи полной маскировки. Хотя, как уже отмечалось выше, в практическом плане полученные с высокой точностью решения, отвечающие малым значениям μ_1^{opt} , мало перспективны в виду их сингулярности.

Из таблицы 3.4 следует, что $\mu_1^{opt} = \mu_{min}$ для всех $n = 4, \dots, 12$ (кроме $n = 1, 2$, когда $\mu_1^{opt} = \mu_{max}$ и $\mu_2^{opt} = \mu_{min}$), тогда как μ_2^{opt} принимает некоторое промежуточное значение между μ_{min} и μ_{max} . Это является проявлением общей тенденции в поведении отдельных компонент оптимального решения задачи (3.27) для всех значений M . Указанная тенденция состоит в том, что соотношения (3.34) (либо (3.35)) для оптимальных проницаемостей, отвечающие схеме чередующегося дизайна 1-го (либо 2-го) типа, выполняются при выполнении условия (3.36) для всех управлений μ_m^{opt} , кроме, быть может, последнего μ_M^{opt} , которое принимает некоторое промежуточное значение между μ_{min} и μ_{max} . Другими словами, для задачи (3.27) вместо (3.34) (либо (3.35)) выполняются следующие соотношения почти чередующегося дизайна:

$$\mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_2^{opt} = \dots = \mu_{M-2}^{opt} = \mu_{max}, \quad \mu_{min} \leq \mu_M^{opt} \leq \mu_{max} \quad (3.38)$$

либо

$$\mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{max}, \quad \mu_2^{opt} = \dots = \mu_{M-2}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_{min} \leq \mu_M^{opt} \leq \mu_{max}. \quad (3.39)$$

Приведем теперь результаты решения задачи маскировки для нескольких конкретных тестов. Первый тест отвечает первой выбранной ранее паре $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.025, 40)$ в (3.37). Соответствующие результаты решения задачи (3.27) в виде оптимальных управлений μ_1^{opt} , μ_M^{opt} и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала $J(\mathbf{m})$ представлены вместе со значениями $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ и $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ (для сравнения) в таблице 3.5. Остальные управления $\mu_2^{opt}, \dots, \mu_{M-1}^{opt}$ при $M \geq 4$ определяются из соотношений (3.39), отвечающих схеме почти чередующегося дизайна 2-го типа. Из таблицы 3.5 видно, что последнее управление μ_M^{opt} совпадает с $\mu_{min} = 0.025$ при $M = 2, 4$ и 6 , при $M \geq 8$ оно принимает

промежуточные между μ_{min} и μ_{max} значения, убывающие от 0.0546 при $M = 8$ до 0.0339 при $M = 16$, тогда как значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ убывает от $1.14 \cdot 10^{-2}$ при $M = 2$ до значения $7.28 \cdot 10^{-5}$ при $M = 16$, отвечающего низкой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Следующий тест отвечает второй выбранной ранее паре $(\mu_{min}, \mu_{max}) = (0.0045, 40)$ в (3.37). Соответствующие результаты решения задачи (3.27) в виде управлений μ_1^{opt} , μ_M^{opt} и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала $J(\mathbf{m})$ представлены вместе со значениями $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ и $J_e(\mathbf{m}^{opt})$ в таблице 3.6, которая является аналогом таблицы 3.5. Остальные значения $\mu_2^{opt}, \dots, \mu_{M-1}^{opt}$ при $M \geq 4$ определяются из соотношений (3.38), отвечающих схеме почти чередующегося дизайна 1-го типа. Из таблицы 3.6 видно, что последнее управление μ_M^{opt} совпадает с $\mu_{min} = 0.0045$ при $M = 2$, а при изменении M от 4 до 16 μ_M^{opt} возрастает от значения 6.3817 до 21.3467, тогда как значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ убывает от $2.78 \cdot 10^{-3}$ при $M = 2$ до значения $8.09 \cdot 10^{-9}$ при $M = 16$, отвечающего достаточно высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Таблица 3.5 — Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.025$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 1600$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	40	0.025	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$2.16 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$
4	40	0.025	$1.83 \cdot 10^{-3}$	$2.77 \cdot 10^{-3}$	$9.02 \cdot 10^{-4}$
6	40	0.025	$7.68 \cdot 10^{-4}$	$8.46 \cdot 10^{-3}$	$6.91 \cdot 10^{-4}$
8	40	0.0546	$3.19 \cdot 10^{-4}$	$6.37 \cdot 10^{-4}$	$4.78 \cdot 10^{-19}$
10	40	0.0465	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$3.52 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-19}$
12	40	0.0411	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{-4}$	$7.96 \cdot 10^{-20}$
14	40	0.0370	$8.91 \cdot 10^{-5}$	$1.78 \cdot 10^{-4}$	$3.19 \cdot 10^{-19}$
16	40	0.0339	$7.28 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	0.0

Достигнутую эффективность можно сделать еще выше, если увеличить контраст μ_{max}/μ_{min} за счет увеличения μ_{max} . В этом можно убедиться из таблицы 3.7, которая является аналогом таблицы 3.6 для случая $\mu_{max} = 70$, отвечающего магнитной проницаемости кобальта. Видно, что указанное изменение μ_{max} до 70 привело к изменению $J(\mathbf{m}^{opt})$ от $1.92 \cdot 10^{-3}$ при $M = 2$ до значения $2.77 \cdot 10^{-10}$ при $M = 16$, которое отвечает очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$. Отметим еще одну особенность последних двух

Таблица 3.6 — Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 40$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 8889$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	40	0.0045	$2.78 \cdot 10^{-3}$	$4.14 \cdot 10^{-3}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$
4	0.0045	6.3817	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$4.85 \cdot 10^{-4}$	0.0
6	0.0045	9.2633	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-5}$	0.0
8	0.0045	11.9708	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$2.66 \cdot 10^{-6}$	0.0
10	0.0045	14.5166	$2.35 \cdot 10^{-7}$	$4.71 \cdot 10^{-7}$	0.0
12	0.0045	16.9168	$5.97 \cdot 10^{-8}$	$1.19 \cdot 10^{-7}$	0.0
14	0.0045	19.1880	$1.98 \cdot 10^{-8}$	$3.96 \cdot 10^{-8}$	0.0
16	0.0045	21.3467	$8.09 \cdot 10^{-9}$	$1.62 \cdot 10^{-8}$	0.0

Таблица 3.7 — Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.0045$, $\mu_{max} = 70$, контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 15556$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$	$J_e(\mathbf{m}^{opt})$
2	70	0.0045	$1.92 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-3}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$
4	0.0045	6.3806	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$	0.0
6	0.0045	9.2573	$4.15 \cdot 10^{-6}$	$8.31 \cdot 10^{-6}$	0.0
8	0.0045	11.9512	$2.66 \cdot 10^{-7}$	$5.31 \cdot 10^{-7}$	0.0
10	0.0045	14.4691	$2.88 \cdot 10^{-8}$	$5.75 \cdot 10^{-8}$	0.0
12	0.0045	16.8218	$4.61 \cdot 10^{-9}$	$9.22 \cdot 10^{-9}$	0.0
14	0.0045	19.0213	$1.00 \cdot 10^{-9}$	$2.00 \cdot 10^{-9}$	0.0
16	0.0045	21.0804	$2.77 \cdot 10^{-10}$	$5.54 \cdot 10^{-10}$	0.0

тестов. Она состоит в том, что построенное оптимальное решение \mathbf{m}^{opt} задачи полной маскировки является при $M \geq 4$ одновременно точным решением задачи внешней маскировки. Это вытекает из соотношений $J_e(\mathbf{m}^{opt}) = 0$, приведенных в последнем столбце каждой из таблиц 3.6 и reftab:ch407 при $M > 2$.

На наш взгляд, представляет интерес сравнить таблицы 3.7 и 3.3 (а также таблицы 3.6 и 3.2), отвечающие одним и тем же данным (μ_{min}, μ_{max}) . Указанное сравнение позволяет сделать вывод об очень сильном влиянии на качество (т.е. точность) решения задачи маскировки именно последнего управления μ_M^{opt} . Действительно, ошибка решения задачи маскировки, определяемая значением $J(\mathbf{m}^{alt})$, где \mathbf{m}^{alt} — чередующееся решение, равна $5.18 \cdot 10^{-4}$ в таблице 3.3 (при $M = 16$) и равна $J(\mathbf{m}^{opt}) = 2.77 \cdot 10^{-10}$ в таблице 3.7 на оптимальном решении

\mathbf{m}^{opt} задачи (3.27), отличающемся от \mathbf{m}^{alt} лишь последней компонентой μ_M^{opt} . Такое существенное уменьшение значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ на шесть порядков обусловлено изменением последнего управления μ_M^{opt} .

Таким образом, применение численного алгоритма решения обратных задач экранирования и маскировки, основанного на оптимизационном методе, позволило получить решения, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе. Для задачи экранирования полученные решения обладают также простотой технической реализации при определенном выборе множества управлений K в (3.24), поскольку отвечающие им экранирующие оболочки состоят из чередующихся слоев, заполненных распространенными материалами. Для задачи маскировки материал последнего слоя может не принадлежать классу природных или инженерных материалов. В связи с этим может возникнуть техническая трудность с реализацией полученных решений. Однако эта трудность не является принципиальной в виду больших успехов, достигнутых в последнее время в создании метаматериалов с заданными магнитными свойствами.

3.5 Случай сферической анизотропной маскировочной оболочки

В этом разделе мы обсудим результаты численных экспериментов по решению обратных задач экранирования и маскировки для трехмерной модели магнитостатики (3.2)–(3.4), предполагая, что проектируемое устройство $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ состоит из конечного числа сферических анизотропных слоев $(\Omega_m, \boldsymbol{\mu}_m)$, $m = \overline{1, M}$. Это означает, что m -ая подобласть Ω_m области Ω заполнена однородной анизотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью в виде диагонального тензора $\boldsymbol{\mu}_m = \text{diag}(\mu_{rm}, \mu_{\theta m}, \mu_{\theta m})$, $m = \overline{1, M}$, где μ_{rm} и $\mu_{\theta m}$ имеют смысл радиальной и тангенциальной компонент тензоров магнитных проницаемостей $\boldsymbol{\mu}_m$. Глобальные радиальная μ_r и тангенциальная μ_θ компоненты глобального диагонального тензора $\boldsymbol{\mu}$ представимы в виде кусочно-постоянных

функций:

$$\mu_r(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_{rm} \chi_m(\mathbf{x}), \quad \mu_\theta(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_{\theta m} \chi_m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.40)$$

Здесь $\chi_m(\mathbf{x})$ – характеристическая функция слоя Ω_m , равная 1 в Ω_m и 0 вне Ω_m . Ясно, что $\mu_r, \mu_\theta \in L_+^\infty(\Omega)$ при условии, что $\mu_r, \mu_\theta > 0$. Обозначим $2M$ -мерный вектор, состоящий из неизвестных коэффициентов $\mu_{rm}, \mu_{\theta m}, m = \overline{1, M}$, в (3.40), через $\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\theta 1}, \mu_{r2}, \mu_{\theta 2}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\theta M})$.

Решение задачи сопряжения в виде (3.2)–(3.4), отвечающей случаю анизотропной оболочки, состоящее из $M+2$ полей $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_{M+1}$, рассматриваемых соответственно в областях $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_M, \Omega_{M+1}$, можно представить в следующем виде (см. [74; 98; 119]):

$$\Phi_0(r, \theta) = (A_0 r / b) \cos \theta \text{ в } \Omega_0, \quad (3.41)$$

$$\Phi_m(r, \theta) = ((r/b)^{\nu_m} A_m + (b/r)^{\nu_m+1} B_m) \cos \theta \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad (3.42)$$

$$\Phi_{M+1}(r, \theta) = (-H_a r / b + B_{M+1} (b/r)^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_{M+1}. \quad (3.43)$$

Здесь $A_0, A_m, B_m, B_{M+1}, m = \overline{1, M}$, – неизвестные коэффициенты, $H_a = \text{const}$, $b = R_M$ и ν_m – коэффициент (степень) анизотропии среды в слое Ω_m , определяемый формулой

$$\nu_m = \sqrt{0.25 + 2(\mu_{\theta m} / \mu_{rm})} - 0.5, \quad m = \overline{1, M}.$$

Неизвестные коэффициенты $A_0, A_m, B_m, B_{M+1}, m = \overline{1, M}$, могут быть определены из условий непрерывности (3.3) смежных полей Φ_m и Φ_{m+1} на их общих границах $r = R_m, m = \overline{0, M}$, образующих систему $2M + 2$ линейных алгебраических уравнений, имеющую вид

$$\begin{aligned} A_0 - A_1 c_0^{1-\nu_1} - B_1 c_0^{2+\nu_1} &= 0, \\ \mu_{r0} A_0 - \mu_{r1} A_1 \nu_1 c_0^{1-\nu_1} + \mu_{r1} B_1 (\nu_1 + 1) c_0^{2+\nu_1} &= 0, \\ -A_m c_m^{-\nu_m} - B_m c_m^{\nu_m+1} + A_{m+1} c_m^{-\nu_{m+1}} + B_{m+1} c_m^{\nu_{m+1}+1} &= 0, \\ -\mu_{rm} A_m \nu_m c_m^{1-\nu_m} + \mu_{rm} B_m (\nu_m + 1) c_m^{2+\nu_m} + \mu_{r(m+1)} A_{m+1} \nu_{m+1} c_m^{1-\nu_{m+1}} - \\ -\mu_{r(m+1)} B_{m+1} (\nu_{m+1} + 1) c_m^{2+\nu_{m+1}} &= 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \\ -A_M - B_M + B_{M+1} &= H_a, \end{aligned}$$

$$-\mu_{rM}A_M\nu_M + \mu_{rM}B_M(\nu_M + 1) - 2\mu_{r(M+1)}B_{M+1} = \mu_{r(M+1)}H_a. \quad (3.44)$$

Здесь $c_m = b/R_m$, $m = \overline{0, M-1}$, $\mu_0 = \mu_{M+1} = \text{const}$ в Ω_0 и Ω_{M+1} , соответственно. Система (3.44) отвечает $2M$ -мерному вектору магнитных проницаемостей $\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\theta1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\theta M})$.

Обратные задачи маскировки и экранирования для рассматриваемого физического сценария формулируются точно так же, как они сформулированы в разд. 3.1 для случая изотропной оболочки, а для их численного решения мы применяем, как в разд. 3.3 – 3.4, оптимизационный метод вместе с методом роя частиц в качестве метода численной оптимизации.

Численное моделирование проводилось для следующих значений a, b, R и μ_0 : $a = 0.04$ м, $b = 0.05$ м, $R = 3$ м, $\mu_0 = 1$ и двух пар значений $(0.08; 20)$ и $(0.02; 20)$, определяющих границы μ_{min} и μ_{max} множества управлений K , где

$$K = \{\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\theta1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\theta M}) \in \mathbb{R}^{2M} : 0 < \mu_{min} \leq \mu_{rm}, \mu_{\theta m} \leq \mu_{max}\}.$$

Наш первый тест связан с решением экстремальной задачи (3.25) с использованием МРЧ для случая полностью анизотропной многослойной оболочки (Ω, \mathbf{m}) для следующей пары значений μ_{min} и μ_{max} :

$$\mu_{min} = 0.08 \quad \text{и} \quad \mu_{max} = 20. \quad (3.45)$$

Оптимизационный анализ с помощью МРЧ для различных значений M привел к результатам, представленным в таблице 3.8 в виде оптимальных значений радиальной и тангенциальной компонент μ_{rm}^{opt} и $\mu_{\theta m}^{opt}$ магнитных проницаемостей слоев (Ω_m, μ_m) и соответствующего минимального значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J_i , где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\theta1}^{opt}, \dots, \mu_{rM}^{opt}, \mu_{\theta M}^{opt})$.

Из таблицы 3.8 видно, в частности, что оптимальные значения магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают в каждом слое при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_r^{opt} = 0.08$ и $\mu_\theta^{opt} = 20$. В то же время значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ равны значению $9.61 \cdot 10^{-3}$ и не меняются с ростом M , причем последнее значение соответствует слабой экранирующей эффективности проектируемой анизотропной экранирующей оболочки. Таким образом, из таблицы 3.8 следует, что решение задачи (3.25) в случае полностью анизотропной оболочки для первой пары параметров $\mu_{min} = 0.08$ и $\mu_{max} = 20$ не обеспечивает ни высокой экранирующей эффективности за счет выбранной конструкции экранирующей

Таблица 3.8 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.08$, $\mu_{max} = 20$, контраст = $\mu_{max}/\mu_{min} = 250$, коэффициент анизотропии $\nu_m = 21.87$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\theta1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\theta2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\theta M}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.08, 20)				9.61·10 ⁻³
2	(0.08, 20)	(0.08, 20)			
4	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
6	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
8	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
10	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
12	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
14	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
16	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	

оболочки, ни простоты ее технической реализации вследствие анизотропности отдельных слоев оболочки с коэффициентом анизотропии $\nu_m = 21.87$.

Для того, чтобы повысить экранирующую эффективность проектируемой оболочки, следует увеличить, как и в случае изотропной оболочки, контраст пары (μ_{min}, μ_{max}) . В этом можно убедиться из анализа таблицы 3.9, являющейся аналогом таблицы 3.8 для второй пары

$$\mu_{min} = 0.02 \quad \text{и} \quad \mu_{max} = 20 \quad (3.46)$$

с контрастом $\mu_{max}/\mu_{min} = 1000$, которому соответствует коэффициент анизотропии $\nu_m = 44.22$, $m = \overline{1, M}$.

Из таблицы 3.9 видно, в частности, что оптимальные значения магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают в каждом слое при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_r^{opt} = 0.02$ и $\mu_{\theta}^{opt} = 20$. В то же время значения $J_i(\mathbf{m}^{opt})$ равны значению $6.32 \cdot 10^{-5}$ и не меняются с ростом M , причем последнее значение соответствует высокой экранирующей эффективности разработанной анизотропной экранирующей оболочки. Таким образом, из таблицы 3.9 следует, что решение задачи (3.25) в случае полностью анизотропной оболочки для второй пары параметров $\mu_{min} = 0.02$ и $\mu_{max} = 20$ обеспечивает высокую экранирующую эффективность за счет выбранной конструкции экранирующей

Таблица 3.9 — Задача экранирования: $\mu_{min} = 0.02$, $\mu_{max} = 20$, контраст = $\mu_{max}/\mu_{min} = 1000$, коэффициент анизотропии $\nu_m = 44.22$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\theta1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\theta2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\theta M}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.02, 20)				6.32·10 ⁻⁵
2	(0.02, 20)	(0.02, 20)			
4	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
6	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
8	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
10	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
12	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
14	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
16	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	

оболочки, хотя и не обеспечивает простоту ее технической реализации вследствие анизотропности отдельных слоев оболочки с большим коэффициентом анизотропии $\nu_m = 44.22$.

Аналогичные результаты имеют место для задачи полной маскировки (3.27). Чтобы убедиться в справедливости этого факта, применим метод роя частиц для решения экстремальной задачи (3.27), отвечающей задаче дизайна анизотропной маскировочной оболочки, для случая первой пары (3.45).

Оптимизационный анализ с помощью МРЧ для различных значений M привел к результатам, представленным в таблице 3.10 в виде оптимальных значений радиальной и тангенциальной компонент μ_{rm}^{opt} и $\mu_{\theta m}^{opt}$ тензорных магнитных проницаемостей слоев (Ω_m, μ_m) и соответствующего минимального значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J , где $\mathbf{m}^{opt} = (\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\theta1}^{opt}, \dots, \mu_{rM}^{opt}, \mu_{\theta M}^{opt})$.

Анализ таблицы 3.10 показывает, что оптимальные значения магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают (как и в случае таблицы 3.8) при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_r^{opt} = 0.08$ и $\mu_\theta^{opt} = 20$. Более того, при любом $M = \overline{1, 16}$ все значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ равны значению 4.97×10^{-3} , которое отвечает слабой маскировочной эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Для того, чтобы повысить маскировочную эффективность проектируемой оболочки, следует увеличить контраст пары (μ_{min}, μ_{max}) . В этом можно убедиться из анализа таблицы 3.11, являющейся аналогом таблицы 3.10 для второй

Таблица 3.10 — Задача полной маскировки: $\mu_{min} = 0.08$, $\mu_{max} = 20$, контраст = $\mu_{max}/\mu_{min} = 250$, коэффициент анизотропии $\nu_m = 21.87$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\theta1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\theta2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\theta M}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.08, 20)				4.97·10 ⁻³
2	(0.08, 20)	(0.08, 20)			
4	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
6	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
8	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
10	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
12	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
14	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	
16	(0.08, 20)	(0.08, 20)	...	(0.08, 20)	

пары (3.46), с контрастом $\mu_{max}/\mu_{min} = 1000$, которому соответствует коэффициент анизотропии $\nu_m = 44.22$, $m = \overline{1, M}$.

Таблица 3.11 — Задача полной маскировки: $\mu_{min} = 0.02$, $\mu_{max} = 20$, контраст = $\mu_{max}/\mu_{min} = 1000$, коэффициент анизотропии $\nu_m = 44.22$, $m = \overline{1, M}$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\theta1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\theta2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\theta M}^{opt})$	$J(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.02, 20)				6.34·10 ⁻⁵
2	(0.02, 20)	(0.02, 20)			
4	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
6	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
8	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
10	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
12	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
14	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	
16	(0.02, 20)	(0.02, 20)	...	(0.02, 20)	

Анализ таблицы 3.11 показывает, что оптимальные значения магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают (как и в случае таблицы 3.9) при любом $M = \overline{1, 16}$, т.е. все слои заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_r^{opt} = 0.02$ и $\mu_{\theta}^{opt} = 20$. Более того, при

любом $M = \overline{1,16}$ все значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ равны значению $6.34 \cdot 10^{-5}$, которое отвечает высокой маскировочной эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$.

Итак, проведенный оптимизационный анализ показал, что высокая эффективность проектируемых устройств магнитной маскировки и экранирования может быть достигнута при использовании как однослойных анизотропных оболочек сферической формы с высокой степенью анизотропии, так и многослойных сферических оболочек, состоящих из нескольких изотропных однородных сферических слоев с оптимальными постоянными проницаемостями, значения которых находятся с помощью разработанного в этой главе численного алгоритма на основе МРЧ. Подчеркнем, что высокая экранирующая и маскировочная эффективность, а также простота технической реализации могут быть достигнуты без использования анизотропных метаматериалов. В частности, высокоэффективные экранирующие оболочки состоят только из двух чередующихся природных или инженерных материалов с высоким контрастом магнитных проницаемостей, тогда как высокоэффективные маскировочные оболочки состоят из таких же слоев чередующихся материалов, кроме последнего слоя, который должен быть заполнен специальным инженерным материалом.

Приведенные в этой главе результаты позволяют сделать вывод о том, что использование предложенного алгоритма для решения рассматриваемых обратных задач маскировки и экранирования, основанного на оптимизационном методе, позволяет проектировать маскировочные и экранирующие устройства в виде многослойных сферических оболочек, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и одновременно простотой технической реализации. Наши основные результаты были получены для случая однородного внешне приложенного поля. Однако возможность применения оптимизационного метода сохраняется и в случае, когда внешне приложенное поле является неоднородным.

Замечание 3.1. Данная глава написана по материалам работ [24; 43; 104; 115]. Близкие по тематике этой главы вопросы, касающиеся моделирования и оптимизации в задачах маскировки для стационарных уравнений Максвелла, затронуты в [28; 52].

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Доказана однозначная разрешимость новых краевых задач с условиями сопряжения на границах раздела различных сред для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики.

2. Разработан математический аппарат решения обратных задач экранирования и маскировки для двумерной и трехмерной моделей магнитостатики, основанный на оптимизационном методе решения обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, и обоснована допустимость его применения для решения рассматриваемых обратных задач.

3. На основе разработанного аппарата численно исследованы обратные задачи экранирования и маскировки для двумерной и трехмерной моделей магнитостатики, в которых маскировочный эффект достигается за счет надлежащего выбора функциональных параметров неоднородной анизотропной (в общем случае) среды, заполняющей искомое устройство в виде полый цилиндрической или сферической оболочки. С помощью оптимизационного метода рассматриваемые обратные задачи сведены к конечномерным экстремальным задачам, в которых роль управлений играют параметры однородных изотропных или анизотропных сред, заполняющих круговые или сферические слои, составляющие искомое маскировочное устройство.

4. Разработан эффективный численный алгоритм, основанный на оптимизационном методе и методе роя частиц, позволяющий численно решать рассматриваемые в диссертации обратные задачи экранирования и маскировки для двумерных и трехмерных моделей магнитостатики.

5. Выполнена программная реализация предложенного алгоритма, исследованы его свойства, разработан комплекс программ, реализующий данный алгоритм. Проведена серия вычислительных экспериментов по решению прикладных задач, возникающих при проектировании специальных функциональных устройств, обеспечивающих невидимость материальных тел относительно статических магнитных полей.

6. Проведен сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов. Исследовано влияние значений геометрических и физических

параметров проектируемых оболочек на важнейшие свойства оптимальных решений рассматриваемых задач, и, в частности, на экранирующую и маскировочную эффективность и простоту технической реализации. Установлены наиболее эффективные механизмы управления статическими магнитными полями. Показано, что использование разработанных в диссертации численных алгоритмов для решения рассматриваемых обратных задач маскировки и экранирования, основанных на оптимизационном методе, позволяет проектировать маскировочные и экранирующие устройства в виде многослойных кольцевых или сферических оболочек, обладающих наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и одновременно простотой технической реализации.

Список литературы

1. Алексеев, Г. В. Маскировка материальных тел через импедансное граничное условие для уравнений Максвелла / Г. В. Алексеев // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 453, № 1. – С. 32–36.
2. Алексеев, Г. В. Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания / Г. В. Алексеев // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 449, № 6. – С. 652–656.
3. Алексеев, Г. В. Управление граничным импедансом в двумерной задаче маскировки материальных тел методом волнового обтекания / Г. В. Алексеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 12. – С. 2044–2061.
4. Алексеев, Г. В. Оценки устойчивости в задаче маскировки материальных тел для уравнений Максвелла / Г. В. Алексеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 12. – С. 1863–1878.
5. Алексеев, Г. В. Анализ и оптимизация в задачах маскировки материальных тел для уравнений Максвелла / Г. В. Алексеев // Дифф. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 3. – С. 366–377.
6. Алексеев, Г. В. Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе / Г. В. Алексеев. – Владивосток : Дальнаука, 2016. – 224 с.
7. Алексеев, Г. В. Анализ двумерной задачи тепловой маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. – 2018. – Т. 58, № 4. – С. 504–519.
9. Алексеев, Г. В. Оценки устойчивости решений задач управления для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях / Г. В. Алексеев, Р. В. Бризицкий // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 8. – С. 993–1004.
10. Алексеев, Г. В. Оптимизационный метод отыскания параметров неоднородной жидкой среды в задаче маскировки материальных тел от акустической локации / Г. В. Алексеев, В. А. Левин // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 454, № 4. – С. 406–410.

11. Алексеев, Г. В. Оптимизационный метод в задачах тепловой маскировки материальных тел / Г. В. Алексеев, В. А. Левин // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 471, № 1. – С. 32–36.
12. Алексеев, Г. В. Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела / Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко // Докл. АН. – 2017. – Т. 472, № 4. – С. 398–402.
13. Алексеев, Г. В. Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек / Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко // Докл. АН. – 2017. – Т. 476, № 5. – С. 512–517.
14. Алексеев, Г. В. Моделирование и оптимизация в задачах проектирования сферических слоистых тепловых оболочек / Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. А. Терешко // Прикладная механика и техническая физика. – 2019. – Т. 60, № 2. – С. 158–168.
15. Алексеев, Г. В. Анализ и оптимизация в задачах дизайна устройств невидимости материальных тел / Г. В. Алексеев, В. А. Левин, Д. Терешко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 328 с.
16. Алексеев, Г. В. Оценки устойчивости решений обратных экстремальных задач для уравнений Гельмгольца / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 14–25.
17. Алексеев, Г. В. Оптимизационный анализ задач маскировки материальных тел на основе метода роя частиц / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Технические проблемы освоения Мирового океана: материалы 7 Всероссийской научно-технической конференции, 2–6.10.2017 г. - Владивосток: ИПМТ ДВО РАН. – 2017. – С. 455–460.
18. Алексеев, Г. В. Оптимизационный метод в задачах акустической маскировки материальных тел / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 9. – С. 1477–1493.

19. Алексеев, Г. В. Численный анализ задач маскировки материальных тел на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Технические проблемы освоения Мирового океана: материалы 8 Всероссийской научно-технической конференции, 30.09–3.10.2019 г. – Владивосток: ИПМТ ДВО РАН. – 2019. – С. 250–256.
20. Алексеев, Г. В. Численное решение двумерной задачи электромагнитной маскировки с использованием многослойной цилиндрической оболочки / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015663062 (дата регистрации 09.12.2015 г.)
21. Алексеев, Г. В. Численное решение задачи электромагнитной маскировки круглого цилиндра с использованием ИЭМП слоя / Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016614892 (дата регистрации 11.05.2016 г.)
8. Алексеев, Г. В. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики / Г. В. Алексеев, В. Г. Романов // Сиб. журн. индустр. матем. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 15–20.
22. Алексеев, Г. В. Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Дифф. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 9. – С. 1155–1166.
23. Алексеев, Г. В. Численный анализ двумерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Дифф. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 9. – С. 1252–1262.
24. Алексеев, Г. В. Численный анализ трехмерных задач магнитной маскировки на основе оптимизационного метода / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 2. – С. 224–238.
25. Алексеев, Г. В. Численное решение двумерной задачи магнитоэлектростатической маскировки с использованием многослойной оболочки / Г. В. Алексеев, Ю. Э. Спивак // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021661442 (дата регистрации 12.07.2021 г.)

26. Алексеев, Г. В. Оптимизационный метод в осесимметричных задачах электрической маскировки материальных тел / Г. В. Алексеев, Д. А. Терешко // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. – 2019. – Т. 59, № 2. – С. 217–234.
27. Аниконов, Д. С. Постановка и численное решение задачи оптимизации в рентгеновской томографии / Д. С. Аниконов, И. В. Прохоров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 1. – С. 18–25.
28. Вычисление координат датчика в поле постоянного магнита по кинематическим и магнитным данным / А. В. Огнев [и др.] // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019666598 (дата регистрации 12.12.2019 г.)
29. Долин, Л. С. О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнением / Л. С. Долин // Известия вузов. Радиофизика. – 1961. – Т. 4. – С. 964–967.
30. Дубинов, А. Е. Маскировка материальных тел методом волнового обтекания / А. Е. Дубинов, Л. А. Мытарева // УФН. – 2010. – Т. 180, № 5. – С. 475–501.
31. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
32. Кабанихин, С. И. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач / С. И. Кабанихин, К. Т. Исаков. – Новосибирск : Новосибир. гос. ун-т, 2001. – 315 с.
33. Лобанов, А. В. Оптимизационный метод в двумерных задачах электрической маскировки / А. В. Лобанов, Ю. Э. Спивак // Дальневосточный математический журнал. – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 31–42.
34. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский. – М. : Наука, 1978. – 544 с.
35. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике / А. Г. Ягола [и др.]. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 216 с.
36. Ректорис, К. вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М. : Мир, 1985. – 590 с.

37. Романов, В. Г. Обратная задача дифракции для уравнений акустики / В. Г. Романов // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 431, № 3. – С. 319–322.
38. Романов, В. Г. Нерассеивающие акустические объекты в анизотропной среде специального вида / В. Г. Романов, Ю. А. Чиркунов // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 448, № 4. – С. 396–398.
39. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
40. Спивак, Ю. Э. Численный анализ 2D модели приближенной электромагнитной маскировки с применением слоистых материалов / Ю. Э. Спивак // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, 15-30.04.2016 г.- Владивосток: ДВФУ. – 2016. – С. 266–267.
41. Спивак, Ю. Э. Анализ решения задачи дизайна магнитной маскировочной оболочки с помощью слоистой структуры / Ю. Э. Спивак // Материалы Региональной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, 15-30.04.2019 г.- Владивосток: ДВФУ. – 2019. – С. 289–290.
42. Спивак, Ю. Э. Оптимизационный метод в двумерных задачах магнитной маскировки / Ю. Э. Спивак // Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 812–825.
43. Спивак, Ю. Э. Численное решение обратной задачи дизайна сферической магнитной маскировочной оболочки / Ю. Э. Спивак // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021661462 (дата регистрации 12.07.2021 г.)
44. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
45. Тихонов, А. Н. Нелинейные некорректные задачи / А. Н. Тихонов, А. С. Леонов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1995. – 312 с.
46. Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск : Научная книга, 1999. – 350 с.

47. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов [и др.]. – М. : Наука, 1990. – 232 с.
48. A d.c. magnetic metamaterial / F. Magnus [et al.] // Nature Materials. – 2008. – Vol. 7. – P. 295–297.
49. Alekseev, G. V. Cloaking via impedance boundary condition for 2-D Helmholtz equation / G. V. Alekseev // Appl. Anal. – 2014. – Vol. 93. – P. 254–268.
50. Alekseev, G. V. Control approach in inverse problems for time-harmonic Maxwell equations under mixed boundary conditions / G. V. Alekseev, R. V. Brizitskii, Y. E. Spivak // Proceedings of the Progress In Electromagnetics Research Symposium – Spring (PIERS). – 2017. – P. 354–358.
51. Alekseev, G. V. Effective method for solving the problem of cloaking an axisymmetric model of electrostatics / G. V. Alekseev, A. V. Lobanov // In: Solovev, D.B., Kyriakopoulos, G.L., Venelin, T. (eds) SMART Automatics and Energy. Smart Innovation, Systems and Technologies, Springer, Singapore. – 2022. – Vol. 272. – P. 353–361.
52. Alekseev, G. V. Modeling and optimization in cloaking problems for Maxwell equation / G. V. Alekseev, A. V. Lobanov, Y. E. Spivak // Proceedings of the 18th International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA). – 2016. – Vol. 7731422. – P. 442–445.
53. Alekseev, G. V. Optimization and discretization in 2D problems of electromagnetic invisible cloaking / G. V. Alekseev, A. V. Lobanov, Y. E. Spivak // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Vol. 1623. – P. 125–137.
54. Alekseev, G. V. Numerical analysis of 2D cloaking problem using multilayered materials / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak // Proceedings of Meetings on Acoustics (POMA). – 2015. – Vol. 24, № 1. – P. 070009.
55. Alekseev, G. V. Analysis of the 3D acoustic cloaking problems using optimization method / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 722, № 1. – 012002(6).

56. Alekseev, G. V. Optimization analysis of a 2D magnetic cloaking problem for bilayer structure / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak // In: Beilina L., Smirnov Y. (eds) Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics. PIERS 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Springer, Cham. – 2018. – Vol. 243. – P. 11–18.
57. Alekseev, G. V. Numerical analysis of 2D cloaking problem using homogeneous materials / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak, A. V. Lobanov // J. Key engineering materials. – 2016. – Vol. 685. – P. 56–59.
58. Alekseev, G. V. Modeling and computer design of magnetic invisibility devices / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak, V. I. Silchenko // Proceedings of the International multidisciplinary conference on industrial engineering and modern technologies (FarEastCon). – 2020. – P. 1–6.
59. Alekseev, G. V. Theoretical analysis of the 2D thermal cloaking problem / G. V. Alekseev, Y. E. Spivak, E. N. Yashchenko // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 803, № 1. – 012001(6).
60. Alekseev, G. V. Optimization method in 2D thermal cloaking problems / G. V. Alekseev, D. A. Tereshko // arXiv:1808.01317. – 2018.
61. Alekseev, G. V. Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices / G. V. Alekseev, D. A. Tereshko // Int. J. Heat Mass Transf. – 2019. – Vol. 135. – P. 1269–1277.
62. Alekseev, G. V. Optimization approach for axisymmetric electric field cloaking and shielding / G. V. Alekseev, D. A. Tereshko, Y. V. Shestopalov // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2021. – Vol. 29, № 1. – P. 40–55.
63. All-dielectric multilayer cylindrical structures for invisibility cloaking / A. Mirzaei [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2015. – Vol. 5, № 5. – P. 9574.
64. Andkjaer, J. Topology optimized low-contrast all-dielectric optical cloak / J. Andkjaer, O. Sigmund // Appl. Phys. Lett. – 2011. – Vol. 98, № 021112. – P. 1–3.
65. Anikonov, D. S. Visible and invisible media in tomography / D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov // Dokl. Math. – 1997. – Vol. 56. – P. 955–958.

66. Anikonov, D. S. Necessary and sufficient conditions for the uniqueness of a solution to a tomography problem / D. S. Anikonov, I. V. Prokhorov // *Comp. Math. Mathem. Phys.* – 2002. – Vol. 42. – P. 353–362.
67. Antimagnets: controlling magnetic fields with superconductor metamaterial hybrids / A. Sanchez [et al.] // *New J. Phys.* – 2011. – Vol. 13, № 093034. – P. 1–11.
68. Bakushinsky, A. Regularization algorithms for ill-posed problems / A. Bakushinsky, M. Y. Kokurin, M. M. Kokurin. – Berlin, Germany : De Gruyter, 2018. – 342 p.
69. Chen, H. Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials / H. Chen, C. T. Chan // *Applied Physics Letters*. – 2007. – Vol. 91, № 183518. – P. 1–3.
70. Chiang, A. C. Elements of Dynamic Optimization / A. C. Chiang. – New York : McGraw-Hill, 1992. – 327 p.
71. Chirkunov, Y. A. Nonscattering acoustic objects in a medium with a spherical stratification / Y. A. Chirkunov // *Acta Mech.* – 2017. – Vol. 228. – P. 2533–2539.
72. Clerc, M. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space / M. Clerc, J. Kennedy // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. – 1995. – Vol. 6, № 1. – P. 58–73.
73. Cloaking using anisotropic multilayer circular cylinder / S. Batool [et al.] // *AIP Advanc.* – 2020. – Vol. 10. – P. 119904.
74. Cloaking using the anisotropic multilayer sphere / S. Batool [et al.] // *Photonics*. – 2020. – Vol. 7, № 52. – P. 1–12.
75. Cummer, S. A. One path to acoustic cloaking / S. A. Cummer, D. Shurig // *New Journal of Physics*. – 2007. – Vol. 9. – P. 45.
76. Dautray, R. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 1: Physical origins and classical methods / R. Dautray, J. L. Lions. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1990. – 720 p.
77. DC electric invisibility cloak / F. Yang [et al.] // *Phys. Review Lett.* – 2012. – Vol. 109, № 053902. – P. 1–5.

78. Denisov, A. M. Elements of the theory of inverse problems / A. M. Denisov. – Utrecht, the Netherlands : VSP, 1999. – 272 p.
79. Experimental realization of a magnetic cloak / F. Gömöry [et al.] // Science. – 2012. – Vol. 335. – P. 1466–1468.
80. Force acting on a magnetic cloak placed in magnetic field [Poster] / M. Solovyov [et al.] // The 13th biennial European Conference on Applied Superconductivity. – 2017. – 3LP4–03.
81. Fujii, G. Exploring optimal topology of thermal cloaks by CMA-ES / G. Fujii, Y. Akimoto, M. Takahashi // Appl. Phys. Lett. – 2018. – Vol. 112, № 061108. – P. 1–5.
82. Girault, V. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. / V. Girault, P.-A. Raviart. – Berlin : Springer-Verlag, 1986. – 376 p.
83. Guenneau, S. Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux / S. Guenneau, C. Amra, D. Veynante // Opt. Express. – 2012. – Vol. 20. – P. 8207–8218.
84. Han, H. Artificial boundary method / H. Han, X. Wu. – Berlin (Beijing) : Springer-Verlag (Tsinghua University Press), 2013. – 423 p.
85. Han, T. Transformation Laplacian metamaterials: recent advances in manipulating thermal and dc fields / T. Han, C. W. Qiu // J. of Optics (United Kingdom). – 2016. – Vol. 18, № 5. – P. 04400.
86. Invisibility cloaks from forward design to inverse design / S. Xu [et al.] // Science China Information Sciences. – 2013. – Vol. 56, № 120408. – P. 1–11.
87. Isotropic transformation optics: approximate acoustic and quantum cloaking / A. Greenleaf [et al.] // New Journ. of Phys. – 2008. – Vol. 10, № 115024. – P. 1–28.
88. Ito, K. Inverse problems. Tikhonov theory and algorithms / K. Ito, B. Jin. – Singapore : World Scientific, 2014. – 330 p.
89. Itoh, I. NbTi/Nb/Cu multilayer composite materials for superconducting magnetic shielding / I. Itoh, K. Kazuo, O. Hiroaki // Nippon Steel Tech. Rep. – 2002. – Vol. 85. – P. 118–124.

90. Ji, Q. Achieving thermal magnification by using effective thermal conductivity / Q. Ji, G. Fang, J. Liang // *Theor. Appl. Mech. Lett.* – 2018. – Vol. 8. – P. 164–170.
91. Kabanikhin, S. I. Inverse and ill-posed problems. Theory and applications / S. I. Kabanikhin. – Berlin, Germany : De Gruyter, 2011. – 475 p.
92. Kennedy, J. Particle Swarm Optimization / J. Kennedy, R. Eberhart // *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, Perth, WA, Australia. – 1995. – Vol. 4. – P. 1942–1948.
93. Kettunen, H. Cloaking and magnifying using radial anisotropy / H. Kettunen, H. Wallen, A. Sihvola // *Appl. Phys.* – 2013. – Vol. 114. – P. 110–122.
94. Kobayashi, M. Transcranial magnetic stimulation in neurology / M. Kobayashi, A. Pascual-Leone // *The Lancet Neurology.* – 2003. – Vol. 2, № 3. – P. 145–156.
95. Kroon, L. Neutral shielding and cloaking of magnetic fields using isotropic media / L. Kroon, K. Jarrendahl // *J. of Physics Condensed Matter.* – 2017. – Vol. 29, № 3. – P. 035801.
96. Leonhardt, U. Optical conformal mapping / U. Leonhardt // *Science.* – 2006. – Vol. 312. – P. 1777–1780.
97. Liu, H. Transformation optics and approximate cloaking / H. Liu, T. Zhou // *Contemp. Math.* – 2011. – Vol. 559. – P. 65–83.
98. Lobanov, A. V. Numerical solution of shielding problem for 3D model of electrostatics in the presence of anisotropic layer / A. V. Lobanov // *Far Eastern Mathematical Journal.* – 2022. – Vol. 22, № 2. – P. 194–199.
99. Lobanov, A. V. Numerical analysis of problem of designing magnetic bilayer cloak / A. V. Lobanov, Y. E. Spivak // *Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS).* – 2017. – P. 1362–1366.
100. Lobanov, A. V. Optimization method of solving 2D problems of designing DC electric shields and cloaks / A. V. Lobanov, Y. E. Spivak, P. Savinov // In: Solovev, D.B., Kyriakopoulos, G.L., Venelin, T. (eds) *SMART Automatics and Energy. Smart Innovation, Systems and Technologies*, Springer, Singapore. – 2022. – Vol. 272. – P. 591–598.

101. Magnetic properties of a dc metamaterial consisting of parallel square superconducting thin plates / C. Navau [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – Vol. 94, № 242501. – P. 1–2.
102. Microscopic magnetic stimulation of neural tissue / G. Bonmassar [et al.] // *Nature Communications.* – 2012. – Vol. 3. – P. 921.
103. Optimization method in 3D static magnetic cloaking problems / G. V. Alekseev [et al.] // *Proceedings of the 19th International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA).* – 2017. – Vol. 8065487. – P. 1212–1215.
104. Optimization-based analysis of inverse problems of designing magnetic cloaking and shielding devices / G. V. Alekseev [et al.] // *Proceedings of the 21st International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA).* – 2019. – № 8879234. – P. 95–98.
105. Optimization-based design of easy-to-make devices for heat flux manipulation / V. D. Fachinotti [et al.] // *Int. J. Therm. Sci.* – 2018. – Vol. 128. – P. 38–48.
106. Pendry, J. B. Controlling electromagnetic fields / J. B. Pendry, D. Shurig, D. R. Smith // *Science.* – 2006. – Vol. 312. – P. 1780–1782.
107. Peralta, I. Optimization-based design of heat flux manipulation devices with emphasis on fabricability / I. Peralta, V. D. Fachinotti // *Sci. Rep.* – 2017. – № 6261. – P. 1–8.
108. Poli, R. Particle swarm optimization: an overview / R. Poli, J. Kennedy, T. Blackwell // *Swarm intelligence.* – 2007. – Vol. 1. – P. 33–57.
109. Popa, B. I. Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers / B. I. Popa, S. A. Cummer // *Phys. Rev. A.* – 2009. – Vol. 79, № 023806. – P. 1–4.
110. Roguin, A. Magnetic resonance imaging in patients with implantable cardioverter-defibrillators / A. Roguin // *J. Am. Coll. Cardiol.* – 2009. – Vol. 54. – P. 556–557.
111. Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell / S. A. Cummer [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – Vol. 100, № 024301. – P. 1–4.

112. Shi, Y. Parameter selection in particle swarm optimization / Y. Shi, R. Eberhart // In: Porto, V.W., Saravanan, N., Waagen, D., Eiben, A.E. (eds) Evolutionary Programming VII. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin/ Heidelberg. – 1998. – Vol. 1447. – P. 591–600.
113. Spivak, Y. E. Numerical analysis of 2D approximate cloaking problem using isotropic multilayered cloak / Y. E. Spivak // 3rd FEFU SNS Students, Master's degree and Postgraduate students Scientific-Practical Conference in english: Conference proceedings. – Vladivostok: Far Eastern Federal University. – 2016. – P. 46–48.
114. Spivak, Y. E. Optimization method in static magnetic cloaking problem / Y. E. Spivak // Proceedings of the Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS). – 2017. – P. 1327–1331.
115. Spivak, Y. E. Theoretical study of 3D cloaking problem for bilayer magnetic structure / Y. E. Spivak // Mathematical Modeling in Electrodynamics: Theory, Methods and Applications: abstracts of international scientific conference. ed. Yu. G. Smirnov. September 23-27, 2019 - Penza: Penza State University. – 2019. – P. 99.
116. Spivak, Y. E. Computer design of cylindrical cloaking shell for the magnetostatics model / Y. E. Spivak // Far Eastern Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 22, № 2. – P. 237–243.
117. Spivak, Y. E. Theoretical and numerical analysis of the magnetic cloaking problem / Y. E. Spivak, A. V. Lobanov, D. A. Tereshko // Proceedings of the Progress in Electromagnetics Research Symposium - August (PIERS). – 2018. – № 8597973. – P. 1609–1616.
118. Supporting online materials for experimental realization of a magnetic cloak / F. Gömory [et al.] // Science. – 2012. – Vol. 335. – P. 1466–1468.
119. Wallen, H. Anomalous absorption, plasmonic resonances, and invisibility of radially anisotropic spheres / H. Wallen, H. Kettunen, A. Sihvola // Radio Sci. – 2015. – Vol. 50. – P. 18–28.
120. Wang, X. H. A route for efficient non-resonance cloaking by using multilayer dielectric coating / X. H. Wang, E. A. Semouchkina // Appl. Phys. Lett. – 2013. – Vol. 102, № 113506. – P. 1–11.

121. Wang, Y. Optimization and regularization for computational inverse problems and applications / Y. Wang, A. G. Yagola, C. Yang. – Berlin, Germany : Springer-Verlag, 2011. – 400 p.
122. Wood, B. Metamaterials at zero frequency / B. Wood, J. B. Pendry // J. Phys.: Condens. Matter. – 2007. – Vol. 19, № 076208. – P. 1–9.
123. Xi, S. Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability / S. Xi // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79, № 155122. – P. 1–4.