

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ АНАЛОГОВЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЛАСТЕЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ

Д.А. Назаров

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН

Россия, 690041, Владивосток, ул. Радио, 5

E-mail: nazardim@iacp.dvo.ru

Ключевые слова: автоматизированное проектирование, надежность, область работоспособности, запас работоспособности

Аннотация: В докладе рассматривается задача использования областей работоспособности для выбора значений параметров элементов аналоговых технических на этапе их проектирования. Используется представление многомерных областей работоспособности с помощью дискретного множества элементарных гиперпараллелепипедов. Обсуждаются подходы и алгоритмы выбора номинальных значений параметров, максимально удаленных от границы области, а также оценки запаса работоспособности в виде расстояния до границы области.

1. Введение

Проектирование технических объектов и систем часто включает в себя этап, заключающийся в подборе оптимальных значений параметров элементов, обеспечивающих стабильную работу системы в условиях дрейфа значений параметров под влиянием внешних факторов и естественных внутренних деградиационных процессов [1, 2]. Для решения этой задачи на начальных этапах проектирования необходимо знать закономерности дрейфа параметров во времени и границы допустимой вариации. В случае дефицита информации о закономерностях дрейфа параметров можно считать целесообразным выбор их номинальных значений в точке, максимально удаленной от границы области их допустимой вариации - так называемой *области работоспособности* (ОР) [3].

2. Задача выбора оптимальных значений параметров

2.1. Задача параметрического синтеза

Задача параметрического синтеза (ПС) технических устройств и систем [1] состоит в выборе номинальных значений параметров элементов (далее - *внутренних параметров*) исследуемого устройства $\mathbf{x}_{nom} = (x_{1nom}, x_{2nom}, \dots, x_{n_{nom}})^T$, которые обеспечивают максимум вероятности их нахождения в области допустимых значений при наличии параметрических возмущений:

$$(1) \quad \mathbf{x}_{nom} = \arg \max P\{\mathbf{X}(\mathbf{x}_{nom}, t) \in \mathbb{D}_x, \forall t \in [0, T]\},$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{x}_{nom}, t)$ - случайный процесс изменения параметров, \mathbb{D}_x - область допустимой вариации значений параметров элементов - *область работоспособности*, T - заданное время эксплуатации устройства.

Область работоспособности в пространстве внутренних параметров определяется *условиями работоспособности* (УР), которые задаются в виде допусков на выходные параметры системы $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$:

$$(2) \quad \mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{y}_{max},$$

где $\mathbf{y}(\mathbf{x}(t))$ - математическая модель исследуемой системы, определяющая зависимость выходных параметров от входных в виде непрерывных зависимостей. Для сложных систем задание модели в аналитическом виде очень затруднено, поэтому наиболее распространенным является задание ее в алгоритмическом виде. Учитывая сказанное, ОР в пространстве значений внутренних параметров исследуемой системы определяется как множество точек этого пространства, в которых выполняется УР (2):

$$(3) \quad \mathbb{D}_x = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}_{min} \leq \mathbf{y}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}_{max}\},$$

Наличие данных о конфигурации области \mathbb{D}_x позволяет осуществлять назначение допусков на внутренние параметры, выбирать номинальные значения этих параметров с учетом влияния различных факторов с оптимизацией как по стохастическим, так и по детерминированным критериям [4].

В случае отсутствия априорной информации о законах изменения значений внутренних параметров, что случается, как правило, на начальных этапах проектирования, вектор номинальных параметров предлагается выбирать в точке $\mathbf{x}_o \in \mathbb{D}_x$ ОР, максимально удаленной от ее границы. Такое расположение вектора начальных значений параметров обеспечит некоторый «запас» работоспособного состояния при дефиците исходной информации об изменениях значений параметров в процессе эксплуатации. Тогда, очевидно, решением поставленной задачи будет множество $\mathbb{D}_o \subset \mathbb{D}_x$ точек в области \mathbb{D}_x , которые являются центрами вписанных в эту область n -мерных шаров максимального объема (рис. 1).

В каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_x$ можно построить множество шаров различных радиусов r от \mathbf{x} до любой из точек на границе этой области и соответствующими объемами $V(\mathbf{x}, r)$. Среди этих шаров целиком лежащий в ОР, имеет минимальный объем (радиус), т.е. $V_x = \min_r V(\mathbf{x}, r)$ и представляет собой запас для возможного дрейфа

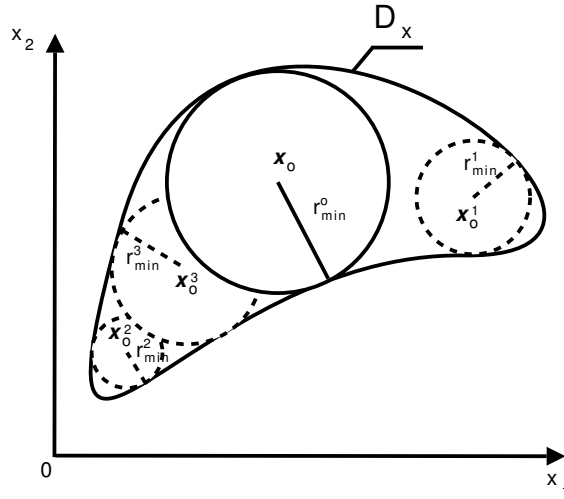


Рис. 1. Выбор параметров, максимально удаленных от границы ОР в двумерном случае

значений внутренних параметров. Искомое множество \mathbb{D}_{opt} состоит из центральных точек шаров с максимальными объемами, т.е.

$$(4) \quad \mathbb{D}_{opt} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_x \mid \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_x} V_x\}.$$

Другими словами, множество \mathbb{D}_{opt} состоит из таких точек \mathbb{D}_x , для которых выполняется

$$(5) \quad \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}_x} \min_r V(\mathbf{x}, r),$$

что означает максимальный запас для возможного дрейфа параметров и выражает критерий *максимального запаса работоспособности* (МЗР).

В большинстве случаев проблема решения задачи ПС связана с отсутствием данных о конфигурации ОР, что существенно затрудняет процесс выбора оптимальных значений номиналов. Предложенный в данной работе алгоритм выбора номинальных значений параметров по критерию МЗР основан на сеточном представлении ОР, рассмотрение которого предваряет описание алгоритмов, которым посвящена данная работа.

2.2. Сеточный метод представления области работоспособности

Среди различных способов приближения ОР известными фигурами, таких как вписанные и описанные параллелепипеды, эллипсоиды или их комбинациями, в данной работе используется сеточное представление ОР, основанное на *методе матричных испытаний* [5]. Изначально метод матричных испытаний был разработан для физического моделирования процесса изменения значений параметров схемных элементов, однако его реализация с привлечением ЭВМ широкого распространения не получила из-за проблемы, связанной с вычислительной сложностью выполнения полного перебора.

Согласно методу матричных испытаний, заданный диапазон возможного изменения каждого параметра

$$(6) \quad a_i^x \leq x_i \leq b_i^x,$$

разбивается эквидистантно на q_i отрезков - квантов $k_i = 1, 2, \dots, q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, в центре каждого из которых выбирается «точка-представитель»:

$$(7) \quad c_i^{k_i} = \frac{a_i^{k_i} + b_i^{k_i}}{2},$$

где $a_i^{k_i}, b_i^{k_i}$ - соответственно левая и правая границы k_i -го кванта i -го параметра [6].

Диапазоны (6) образуют n -мерный гиперпараллелепипед B_x в декартовой системе координат значений внутренних параметров. В качестве этого параллелепипеда может выступать гиперпараллелепипед допусков B_d , образованный допустимыми значениями каждого параметра в отдельности, либо *описанным гиперпараллелепипедом* B_o , ограничивающий область допустимых значений совместной вариации внутренних параметров.

В результате квантования B_x образуется сетка, разбивающая область поиска на множество непересекающихся элементарных гиперпараллелепипедов. В геометрическом центре каждого из этих гиперпараллелепипедов задана точка-представитель с координатами (7), которые реализуют множество несовместных ситуаций дискретного изменения значений параметров в области, ограниченной B_x . В каждой такой точке-представителе вычисляются выходные значения параметров и проверяются УР (2). Предполагается, что результаты расчета значений выходных параметров и проверки УР в точке представителе элементарного параллелепипеда распространяются на все его точки. Таким образом, множество элементарных параллелепипедов \mathbb{B}_g разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathbb{B}_x^g = \mathbb{B}_x^+ \cup \mathbb{B}_x^-$, при этом $\mathbb{B}_x^+ \cap \mathbb{B}_x^- = \emptyset$, где \mathbb{B}_x^+ является представлением искомой ОР \mathbb{D}_x , которое будем называть *сеточным представлением области работоспособности* (СПОР). Элементарные параллелепипеды из множества \mathbb{B}_x^g будем называть *элементами* или *ячейками* сетки.

Для задания СПОР используются наборы данных двух типов:

- Геометрические параметры сетки;
- Данные о принадлежности каждого элемента сетки подмножеству \mathbb{B}_x^+ или \mathbb{B}_x^- ;

Геометрические параметры сетки позволяют вычислить координаты границ любого ее элемента и координаты его точки-представителя, имея набор индексов (k_1, k_2, \dots, k_n) , а также можно вычислить индексы элемента сетки в котором находится некоторая точка с заданными координатами (внутри гиперпараллелепипеда B_x) $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$. Геометрические параметры сетки задаются следующим набором данных:

- Размерность n пространства внутренних параметров;
- Диапазон (6) допустимых значений для каждого параметра;

- Количество квантов в разбиении диапазона значений каждого параметра;

Принадлежность элемента сетки с индексами (k_1, k_2, \dots, k_n) множеству \mathbb{B}_x^+ или \mathbb{B}_x^- задается массивом индикаторов (МИ) элементов сетки

$S[R] = (s_1, s_2, \dots, s_R)$, где R - количество элементов сетки:

$$(8) \quad R = \prod_{i=1}^n q_i,$$

а элементы МИ принимают значения (для нормированного массива)

$s_p \in \{0, 1\}$. Элемент s_p МИ далее будет обозначаться как $S[p]$. Значение состояния $S[p] = 0$ означает принадлежность соответствующего элемента сетки подмножеству \mathbb{B}_x^- , а значение $S[p] = 1$ означает принадлежность соответствующего ему элемента сетки подмножеству \mathbb{B}_x^+ . О соответствии каждому элементу сетки, заданному с помощью n индексов (k_1, k_2, \dots, k_n) , единственного элемента $S[p]$ МИ более подробно описано в работе [6].

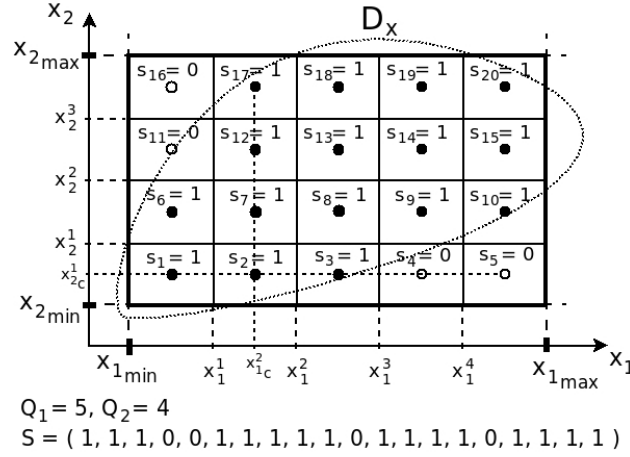


Рис. 2. Квантование области поиска и сеточное представление ОР в двумерном пространстве параметров

2.3. Выбор параметров, оптимальных по критерию запаса работоспособности

Решение задачи поиска точек, оптимальных по критерию МЗР (4) в рамках СПОР заключается в поиске элементов сетки из подмножества \mathbb{B}_x^+ , оптимальных по критерию (5), где в качестве единицы измерения используется элемент сетки.

Как было сказано, множество \mathbb{B}_x^+ состоит из элементов сетки, являющихся представлением ОР, т.е. элементарных параллелепипедов, во внутренних точках которых принимается выполнение УР (2). Будем обозначать элемент сетки, задаваемый индексами (k_1, k_2, \dots, k_n) как e_{k_1, k_2, \dots, k_n} .

Алгоритм поиска оптимальных в смысле МЗР элементов $e_{k_1, k_2, \dots, k_n} \in \mathbb{B}_x^+$ состоит в расчете минимального расстояния от каждого элемента сетки этого множества до границы каким-либо из известных методов, основу которых составляют построение некоторой симметричной фигуры $\mathbb{B}_c^r \subseteq \mathbb{B}_x^g$ с центром $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c} \in \mathbb{B}_x^+$ и «радиусом»

r , увеличивающимся на каждой итерации до тех пор, пока эта фигура не выйдет за границу ОР. Критерием выхода фигуры за границу ОР является наличие в \mathbb{B}_c^r хотя бы одного элемента сетки из подмножества \mathbb{B}_x^- или выполнение

$$(9) \quad \mathbb{B}_c^r \cap \mathbb{B}_x^- \neq \emptyset.$$

Объем фигуры \mathbb{B}_c^r зависит от положения центрального элемента $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c} \in \mathbb{B}_x^+$ и длины радиуса r : $V(e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c}, r)$. Из всех возможных фигур, построенных в e_{k_1, k_2, \dots, k_n} , вписанной в СПОР будет фигура с минимальным радиусом, т.е.

$$v(e_{k_1, k_2, \dots, k_n}) = \min_r V(e_{k_1, k_2, \dots, k_n}, r).$$

Таким образом, *первый этап* решения задачи оптимизации состоит в поиске минимального расстояния от текущего элемента до границы СПОР, измеряемого в количестве элементов сетки. Результат этого этапа записывается в виде весового коэффициента элемента $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c}$ в МС:

$$S[p(k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c)] = \arg \min_r V(e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c}, r), \quad r > 0.$$

Второй этап оптимизации заключается в поиске элементов, имеющих максимальный вес (максимальное расстояние до границы):

$$\max_{\mathbb{B}_x^+} v(e_{k_1, k_2, \dots, k_n}),$$

т.е. выполняется построение множества $\mathbb{B}_{opt}^r \subset \mathbb{B}_x^+$:

$$(10) \quad \mathbb{B}_{opt}^r = \{e_{k_1, k_2, \dots, k_n}^* \in \mathbb{B}_x^+ \mid e_{k_1, k_2, \dots, k_n}^* = \arg \max_{\mathbb{B}_x^+} v(e_{k_1, k_2, \dots, k_n})\}.$$

Таким образом, критерий МЗР выбора оптимальных элементов сетки будет выглядеть следующим образом:

$$(11) \quad \max_{e_{k_1, k_2, \dots, k_n} \in \mathbb{B}_x^+} \min_r V(e_{k_1, k_2, \dots, k_n}, r).$$

Для итогового расчета значений параметров, оптимальных по критерию МЗР, необходимо выделить в множестве \mathbb{B}_{opt}^r связанные группы [7] элементов сетки и для каждой группы провести интерполяцию координат точек-представителей (7), например, методом вычисления ее центра тяжести. В данном случае важно иметь уверенность, что связанные группы элементов сетки образуют собой выпуклые фигуры.

3. Алгоритм построения вписанного куба максимального объема

В качестве вписываемой фигуры \mathbb{B}_c^r предлагается использовать n -мерный гиперкуб, с центральным элементом $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c} \in \mathbb{B}_x^+$ и длиной ребра $2 \cdot r + 1$. Величину r будем называть «радиусом», при этом $r > 0$. Куб состоит из элементов, индексы которых составляют все возможные комбинации из диапазонов (рис. 3):

$$(12) \quad k_i = k_i^c - r, \dots, k_i^c + r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in \mathbb{N},$$

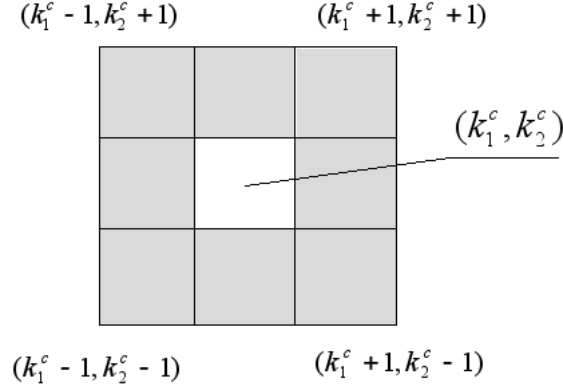


Рис. 3. Двумерный куб, состоящий из элементов сетки при $r = 1$

при этом множество \mathbb{B}_c^r состоит из элементов сетки, удовлетворяющих (12)

$$(13) \quad \mathbb{B}_c^r = \{e_{k_1, k_2, \dots, k_n} \in \mathbb{B}_x^+ \mid k_i = k_i^c - r, \dots, k_i^c + r, i = 1, 2, \dots, n\}, r \in \mathbb{N}.$$

Основными параметрами, которыми задается куб, являются индексы центрального элемента k_i^c , $i = 1, 2, \dots, n$ и «радиус» r .

Суть алгоритма построения вписанного в СПОР куба состоит в проверке состояний элементов сетки, индексы которых удовлетворяют (12) для заданного элемента $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c} \in \mathbb{B}_x^+$ и «радиуса» r с последовательным инкрементом последнего в случае успешного построения вписанного куба. Построение считается неуспешным, если выполнено условие (9) выхода куба из СПОР или значения индексов k_i какого-либо из элементов куба вышли за допустимые интервалы значений индексов квантов (7).

Состоянию $S[p(k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c)]$ элемента $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c}$ присваивается значение «радиуса» r последнего (максимального) успешно построенного куба. Важно также отметить условие $r > 0$, указывающее, что в случае неудачного построения куба в $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c}$ с начальным «радиусом» $r = 1$, состояние этого элемента не должно меняться на «0», т.к. это приведет к изменению признака принадлежности подмножеству \mathbb{B}_x^+ , т.е. состоянию центрального элемента присваивается вес только больше нуля.

Алгоритм проверки элементов сетки внутри куба (13) на каждой итерации инкремента «радиуса» r состоит в обходе только элементов внешней границы, поскольку нет необходимости повторно обходить элементы куба с «радиусом» $r - 1$, состояния которых были проверены на предыдущей итерации.

Основной частью обхода граничных элементов куба является перебор элементов сечения куба по граничным значениям одного из индексов. Для этого необходимо зафиксировать один из n индексов k_j в значении сначала левой границы $k_j = k_j^c - r$, затем – в значении правой границы $k_j = k_j^c + r$. После фиксации j -го индекса в каждой из граничных значений, необходимо выполнить обход элементов сетки в сечении по k_j , т.е. выполнить перебор всех возможных комбинаций остальных $n - 1$ свободных индексов:

$$k_i = k_i^c - r, k_i^c - r + 1, \dots, k_i^c + r, \forall i \in \{\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}\}.$$

Для перебора всех граничных элементов куба необходимо выполнить эту операцию для $j = 1, 2, \dots, n$. В этом случае при каждом j возникнут ситуации повторного

перебора элементов, являющихся общими для сечений. Для примера в двумерном случае индексами таких элементов будут $(k_i^c - r, k_i^c - r)$, $(k_i^c - r, k_i^c + r)$, $(k_i^c + r, k_i^c - r)$, $(k_i^c + r, k_i^c + r)$ (рис. 3).

Для устранения повторных обходов предлагается исключить граничные значения индексов, которые были проверены для сечений по k_i при $i < j$. Таким образом, при переборе свободных индексов сечения по k_j следует учитывать диапазоны $k_i = k_i^c - r + 1, \dots, k_i^c + r - 1$ только для $i < j$, а для остальных $i > j - k_i = k_i^c - r, \dots, k_i^c + r$.

Перебор всех комбинаций свободных индексов $k_i = 1, 2, \dots, q_i$, $i \in \{\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}\}$ основан на алгоритме, аналогичном переносу слагаемых в старшие разряды. Пусть заданы индексы (k_1, k_2, \dots, k_n) , значения каждого ограничены $1 \geq k_i \geq q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Определена процедура инкремента i -го индекса, которая в случае $k_i = q_i$ и $i < n$ рекурсивно вызывает себя с параметром $i + 1$ для инкремента индекса k_{i+1} и после этого сбрасывает индекс на начальное значение $k_i = 1$. Выполнение условия $k_i = q_i$ и $i = n$ рекурсивно сигнализирует, что дальнейший инкремент невозможен. Для генерации новой комбинации индексов (k_1, k_2, \dots, k_n) достаточно вызвать описанную процедуру инкремента для индекса k_1 .

Ниже приведено более строгое описание алгоритма обхода элементов куба (Алгоритм 1), из которого вызываются процедура установки начальных значений свободных индексов (Алгоритм 2) и процедура обхода элементов сечения (Алгоритм 3). Процедура выбора оптимальных элементов сетки методом построения максимального вписанного куба описан как «Алгоритм 4», явно вызывающий процедуру, описанную алгоритмом 1.

Алгоритм 1. Проверка граничных элементов куба с «радиусом» r

- Цикл по $j = 1$ до n
 - $k_j = k_j^c - r$;
 - Установка начальных значений свободных индексов (фикс. j);
 - Если успешный цикл обхода сечения по k_j , то
 - * Результат проверки: построение куба не удалось;
 - * Выход из процедуры;
 - $k_j = k_j^c + r$;
 - Установка начальных значений свободных индексов (фикс. j);
 - Если успешный цикл обхода сечения по k_j , то
 - * Результат проверки: построение куба не удалось;
 - * Выход из процедуры;
- Результат проверки: построение куба с «радиусом» r успешно.

Алгоритм 2. Установка начальных значений свободных индексов

- Цикл по $i = 1$ до n
 - Если $i < j$, то
 - * $k_i = k_i^c - r + 1$;

- Если $i > j$, то
 - * $k_i = k_i^c - r$;

Алгоритм 3. Цикл обхода элементов сечения по k_j .

- Цикл пока возможна новая комбинация свободных индексов
 - Если $S[p(k_1, k_2, \dots, k_n)] = 0$, то
 - * Результат проверки: найден элемент из B_x^- ;
 - * Выход из процедуры;
 - Генерация новой комбинации свободных индексов;
- Результат проверки: все элементы из B_x^+ ;

Алгоритм 4. Построение вписанного куба максимального объема.

- $r_{max} = 1$;
- Цикл по всем элементам $e_{k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c} \in \mathbb{B}_x^+$
 - $r = 1$;
 - Цикл пока можно построить куб с «радиусом» r (алг.1);
 - * Инкремент r : $r = r + 1$;
 - Если $r > 1$, то
 - * Установить вес элемента $S[p(k_1^c, k_2^c, \dots, k_n^c)] = r - 1$;
 - * Если $r > r_{max}$, то
 - $r_{max} = r$;
- Цикл от $p = 1$ до R
 - Если $0 < S[p] < r_{max}$, то
 - * $S[p] = 1$;

В результате выполнения алгоритма 4 состояния элементов сетки, которые являются центрами вписанного куба максимального объема, помечены маркером r_{max} . Вычисление значений параметров, оптимальных по критерию МРЗ (5) выполняется выделением связных множеств [6], состоящих из маркированных элементов в группы и вычислением центра тяжести каждой из них с использованием значений координат их точек-представителей (7).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-08-31291 мол_а - «Эффективные методы и алгоритмы построения областей работоспособности аналоговых технических систем»).

Список литературы

1. Абрамов О.В. Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М.: Наука, 1992. 176 с.
2. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования: Учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 336 с.
3. Абрамов О.В., Катуева Я.В. Назаров Д.А. Оптимальный параметрический синтез по критерию запаса работоспособности // Проблемы управления. 2007. № 6. С. 64–69.
4. O.V. Abramov, Y.V. Katueva and D.A.Nazarov Reliability-Directed Distributed Computer-Aided Design System // Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management IEEM 2007. Singapore: IEEE, 2007. P. 1171–1175.
5. Б.В. Васильев, Б.А. Козлов, Л.Г. Ткаченко Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств. М.: Советское радио, 1964.
6. Катуева Я.В., Назаров Д.А. Аппроксимация и построение областей работоспособности в задаче параметрического синтеза // Международный симпозиум «Надежность и качество»: Сборник научных трудов. Пенза: ПГУ, 2005. С. 130–134.
7. Катуева Я.В., Назаров Д.А. Алгоритмы анализа области работоспособности, заданной в матричной форме // Информатика и системы управления. 2005. № 2(10). С. 118–128.